

BAB I  
KONSEP DASAR, PEMODELAN,  
KOMPUTASI, DAN SIMULASI

## A. Konsep Dasar

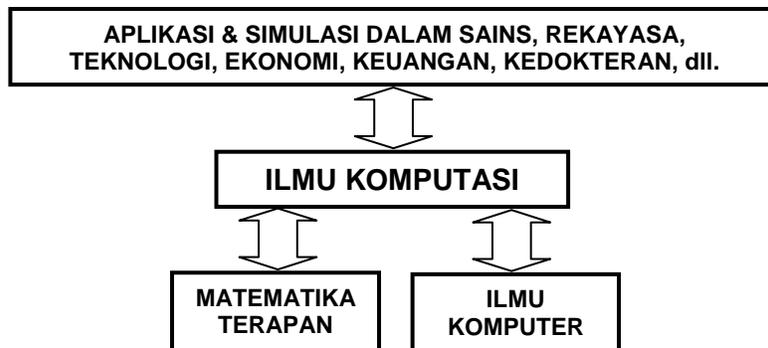
Matematika merupakan ilmu yang sangat penting untuk membantu mencari solusi berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi seperti ilmu pengetahuan alam (sains), ilmu sosial, teknik rekayasa, dan kedokteran. Pengertian matematika sulit untuk didefinisikan secara akurat, akan tetapi dapat dikatakan bahwa matematika adalah ilmu yang mempelajari mengenai kuantitas (aritmatika), struktur (aljabar), ruang (geometri) dan perubahan (analisis). Adanya kebutuhan menghitung telah melahirkan aritmatika, kebutuhan abstraksi telah melahirkan aljabar, kebutuhan mengukur telah melahirkan geometri. Matematika berfungsi menyampaikan gagasan menjadi suatu model yang dipresentasikan dalam bentuk kalimat, persamaan aljabar, persamaan diferensial, persamaan integral, diagram, grafik atau tabel. Tujuannya adalah untuk mencari kebenaran kuantitatif berdasarkan dalil, teori, hipotesis dan logika. Keterkaitan antara teori matematika dengan permasalahan dalam dunia nyata memunculkan istilah matematika murni (*pure mathematics*) dan matematika terapan (*applied mathematics*) sebagai jembatan yang menghubungkan matematika murni dengan ilmu pengetahuan dan teknologi. Perkembangan matematika terapan telah mendorong temuan-temuan matematika baru dan kadang-kadang mengarah pada lahirnya cabang-cabang baru dari matematika atau bahkan disiplin ilmu yang sepenuhnya baru, seperti ilmu komputer dan ilmu komputasi.

### A.1. Matematika Terapan, Ilmu Komputer, dan Ilmu Komputasi

Matematika terapan dapat didefinisikan sebagai suatu proses penerapan matematika pada disiplin ilmu lain. Berbagai masalah dalam ilmu pengetahuan dan teknologi dapat diabstraksi menjadi masalah matematika dan dianalisis dengan teori-teori matematika. Pada matematika terapan ada bidang analisis numerik yang membahas sekitar 75% masalah matematika dan sekitar 25% membahas aplikasinya pada bidang ilmu (Stoer & Bulirsch). Berbagai masalah di bidang ilmu tidak dapat diselesaikan dengan solusi analitis sejati, seringkali harus diselesaikan dengan pendekatan numerik, terlebih setelah adanya komputer. Sejak 1970-an timbul fisika komputasi, kimia komputasi, biologi komputasi, dll. yang secara umum disebut komputasi ilmu pengetahuan alam (sains) yang membahas sekitar 25% masalah

matematika dan sekitar 75% masalah aplikasinya dibidang fisika, kimia, biologi dan lain-lain. Kemudian sejak 1990-an timbul ilmu komputasi yang membahas sekitar 50% masalah matematika dan sekitar 50% masalah aplikasinya pada bidang ilmu. Komputasi ilmu pengetahuan alam kemudian menjadi salah satu cabang ilmu komputasi.

Ilmu komputasi adalah bidang ilmu yang mempunyai perhatian pada penyusunan model matematika dan teknis penyelesaian numerik serta penggunaan komputer untuk menganalisis dan memecahkan masalah ilmiah. Dalam prakteknya adalah penggunaan model matematik dan simulasi komputer serta berbagai bentuk komputasi numerik untuk menyelesaikan masalah ilmu pengetahuan dan teknologi, akan tetapi dalam perkembangannya digunakan juga untuk menemukan prinsip-prinsip baru ilmu pengetahuan yang mendasar. Ilmu komputasi kemudian berkembang sebagai disiplin ilmu tersendiri yang diberikan di jurusan Ilmu Komputasi, mulai dari tingkat BSc, MSc, sampai PhD, lengkap dengan kurikulum, silabus, buku, dan jurnal ilmiah. Dan perannya yang lebih penting adalah ilmu Komputasi telah menjembatani tiga disiplin lain yaitu matematika terapan, ilmu komputer dan berbagai bidang ilmu pengetahuan alam, rekayasa, teknologi, ekonomi, keuangan, kedokteran, dan sebagainya, sesuai blok diagram dibawah (Yasar dkk).

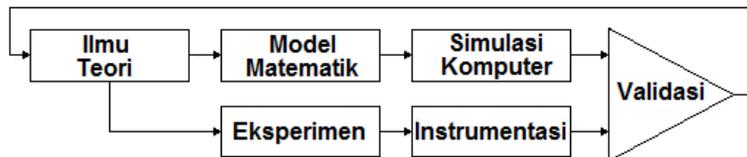


Gambar 1.1 - Blok diagram hubungan antara disiplin keilmuan

Adalah ilmuwan besar abad 21, John Von Neumann yang meletakkan dasar-dasar ilmu komputasi melalui karya-karyanya tidak hanya dalam bidang matematika, teori kuantum dan teori permainan, namun juga dalam fisika nuklir dan ilmu komputer. Akibat ketertarikannya pada bidang hidrodinamika dan kesulitan yang hadapi dalam penyelesaian persamaan diferensial parsial nonlinier, maka John Von Neumann kemudian beralih mendalami bidang komputasi. Bersama-sama dengan Stanislaw M. Ulam, Enrico Fermi, dan Nicholas Metropolis, John von Neumann mengembangkan

program simulasi komputer untuk proyek pembuatan bom atom di Los Alamos pada perang Dunia II. Dengan diciptakannya komputer elektronik pertama yang disebut ENIAC (*Electronic Numerical Integrator and Computer*), maka ilmu komputer dan metode komputasi mulai banyak dipelajari secara mendalam. Sebagai konsultan pada pengembangan komputer ENIAC, Von Neumann merancang konsep arsitektur yang menggambarkan komputer dengan empat bagian utama: (1) unit aritmatika dan logika (ALU); (2) unit kontrol; (3) memori, dan (4) alat masukan dan keluaran (I/O). Seluruh bagian dihubungkan oleh berkas kawat yang disebut *bus*. Walaupun teknologi komputer digital berubah secara drastis sejak komputer pertama pada tahun 1940-an, tetapi kebanyakan komputer sampai sekarang masih menggunakan arsitektur Von Neumann.

**Ilmu komputer** adalah bidang ilmu yang mempelajari komputasi, teknologi, arsitektur, perangkat keras dan perangkat lunak komputer. Selama ribuan tahun, komputasi dilakukan secara mental dengan menggunakan pena dan kertas, atau kapur dan batu tulis, yang kadang-kadang dengan bantuan tabel atau alat hitung. Namun sekarang, kebanyakan komputasi dilakukan dengan menggunakan komputer. Data masukan diolah oleh suatu algoritma atau tahapan-tahapan penyelesaian berupa program yang tersimpan di dalam memori komputer. Hasilnya adalah keluaran berupa angka-angka, tabel atau grafik. Ilmu komputer merupakan disiplin yang melingkupi cabang ilmu yang cukup luas, mulai dari masalah teori-teori dasar sampai teknologi aplikasi. Peter J. Dennings membagi ilmu komputer dalam dua belas sub-bidang yaitu: (1) Algoritma dan struktur data; (2) Bahasa pemrograman; (3) Arsitektur komputer; (4) Sistem operasi dan jaringan kerja; (5) Rekayasa perangkat lunak; (6) Basis data dan sistem perolehan kembali informasi; (7) Kecerdasan buatan dan robotik; (8) Grafika komputer; (9) Interaksi manusia-komputer; (10) Komputasi; (11) Informatika organisasional; dan (12) Bioinformatika. Bisa dikatakan bahwa ilmu komputasi berkembang berkat kemajuan Ilmu Komputer, terutama dengan munculnya komputer berkinerja tinggi dan komputer yang dapat bekerja secara paralel.



Gambar 1.2 - Hubungan antara Ilmu Komputasi dan Eksperimen

Ilmu berdasarkan metodologi dominan yang digunakannya, dibedakan antara ilmu teori (*theoretical science*) dan ilmu pengamatan atau eksperimental (*observational/experimental science*). Dimana para ilmuwan lebih menyukai ilmu pengetahuan teori yang bisa dibuktikan melalui

eksperimen. Dalam ilmu fisika misalnya ada fisika teori dan fisika eksperimental. Sebagai contoh adalah teori relativitas umum yang diperkenalkan oleh Albert Einstein pada tahun 1916, sebagai gagasan kontroversial yang sangat berbeda dengan fisika klasik dan hukum gravitasi Newton yang dikenal pada waktu itu. Relativitas umum Einstein menggambarkan alam semesta sebagai suatu sistem geometris dengan tiga dimensi ruang dan satu dimensi waktu dalam bentuk persamaan diferensial yang dikenal sebagai persamaan medan Einstein. Solusi persamaan ini adalah untuk menemukan hubungan antara kelengkungan ruang-waktu dengan kerapatan massa-energi. Persamaan medan Einstein kemudian memperlihatkan bahwa setiap benda bermassa mengakibatkan ruang-waktu sekitarnya melengkung dan menimbulkan medan gaya berat atau gravitasi, yang kemudian dikenal sebagai medan gravitasi Einstein. Teori ini baru dapat diterima secara luas setelah dikonfirmasi kebenarannya oleh eksperimen dan pengamatan fisika. Seperti halnya semua bidang ilmu pengetahuan, banyak sekali teori yang diajukan. Akan tetapi ilmu pengetahuan hanya terbatas pada sesuatu yang bisa dibuktikan melalui pengamatan atau eksperimen. Hipotesis atau argumen-argumen teoritis saja dianggap tidaklah cukup.

Kemudian di antara ilmu teori dan ilmu eksperimental muncul ilmu komputasi (*computational science*) yang berkembang bersamaan dengan kecepatan pengolahan komputer, kemajuan model matematik dan penerapan simulasi komputer. Fisika komputasi sebagai cabang ilmu fisika telah memberikan pemahaman baru dalam mempelajari sistem nyata di alam. Banyak masalah fisika dapat dicari solusinya dengan bantuan model matematik dan simulasi komputer, tanpa harus selalu mengandalkan eksperimen yang membutuhkan bahan, peralatan dan biaya cukup besar. Apalagi jika dilakukan dengan metode coba-coba (*trial and error*) yang tidak terarah dan dilakukan berulang-ulang. Hal ini dapat menyebabkan terjadinya pemborosan. Dengan bantuan model matematik dan simulasi komputer maka eksperimen dapat dilakukan lebih terarah. Fisika eksperimental tetap diperlukan untuk menjustifikasi dan memvalidasi kebenaran fisika komputasi. Jadi peran fisika komputasi ada dua yaitu untuk mengkaji hipotesis dan argumen-argumen dari fisika teori dan untuk mendukung keberhasilan dari fisika eksperimental.

Selain fisika, dalam disiplin ilmu dasar lainnya seperti kimia dan biologi, penggolongan ilmu berdasarkan metodologi dominannya juga mulai terlihat, yang ditunjukkan dengan munculnya bidang-bidang khusus berdasarkan penggolongan tersebut, lengkap dengan jurnal-jurnal yang relevan untuk melaporkan hasil-hasil penelitiannya. Sebagai contoh dalam ilmu kimia, melengkapi kimia eksperimental (*experimental chemistry*) dan kimia teori (*theoretical chemistry*), berkembang pula kimia komputasi (*computational chemistry*), seperti juga di bidang biologi dikenal biologi teori (*theoretical biology*) serta biologi komputasi (*computational biology*), lengkap dengan jurnalnya seperti *Journal of Computational Chemistry* dan *Journal of*

*Computational Biology*. Cara penggolongan yang digunakan ini berbeda dengan cara penggolongan lain berdasarkan obyek kajian, seperti penggolongan kimia atas kimia organik, kimia anorganik, dan biokimia. Demikian juga penggolongan biologi atas mikro biologi, biologi molekuler dan rekayasa biologi. Ilmu komputasi telah membantu mengkaji aspek-aspek komputasi, pemodelan dan simulasi untuk memecahkan masalah di bidang ilmu-ilmu tersebut.

Dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi nuklir, pemodelan dan simulasi sangat diperlukan, karena bidang ini berhubungan dengan radiasi dan zat radioaktif yang berbahaya. **Komputasi Nuklir** menyusun model matematik dan teknik penyelesaian numerik di bidang nuklir seperti: penyelesaian persamaan transportasi neutron untuk rancangan suatu reaktor nuklir, simulasi keadaan dinamik pembangkit listrik tenaga nuklir pada saat kecelakaan, metode Monte Carlo untuk menghitung dosis radiasi penanganan penyakit cancer, dan lain-lain. Fakta sejarah menunjukkan bahwa simulasi komputer skala besar pertama kali digunakan adalah untuk memodelkan dan mensimulasikan ledakan bom atom pada Proyek Manhattan selama Perang Dunia II. Tujuan dari simulasi tersebut adalah untuk menganalisis dan memprediksi kinerja, keamanan dan reliabilitas senjata nuklir sebelum dilakukan uji coba bom atom sesungguhnya yaitu di jurang Jonardo del Muerto, New Mexico, Amerika Serikat. Sampai sekarang, uji coba hulu ledak nuklir dilakukan dengan simulasi komputer yang mempunyai keakuratan tinggi.

Ada dua solusi untuk memecahkan masalah kuantitatif secara matematik yaitu solusi analitik dan solusi komputasi atau numerik. Di era modern sekarang ini para ilmuwan menghadapi banyak masalah kuantitatif sulit berupa masalah berskala raksasa, tidak linier, multikomponen, multidisipliner, Invers, stokastik, kompleks dan khaotik. Solusi komputasi sangat diperlukan untuk semua masalah ini. Timbulnya masalah multidisipliner tampak dari gejala misalnya doktor matematik menjadi profesor di jurusan kimia, profesor kimia menemukan algoritma komputasi, profesor kimia menjadi kepala pusat komputer, profesor manajemen menulis buku manajemen modern berasas dinamika tidak linear, doktor teknik pertanian menulis buku *Finite Element Analysis*, dll. Dari fakta ini jelas bahwa spesialisasi menjadi generalisasi secara bertahap. Ilmu komputasi, bersama matematika terapan dan ilmu komputer, secara kuantitatif sejak 1970-an telah sukses menyatukan banyak disiplin. Misalnya di bidang keuangan muncul persamaan *Black-Scholes* yang mirip persamaan difusi di fisika. Contoh lain adalah kerjasama antara matematika, ilmu komputer dan ilmu komputasi dalam mencari nilai pribadi matriks raksasa dengan metode Lanczos & subruang Krylov yang harus dibantu komputer berkinerja tinggi.

Jadi untuk masalah kuantitatif modern yang sulit, ada istilah bahwa matematika bersifat: “Kita paham bagaimana menyelesaikan suatu masalah, tetapi tidak dapat melakukannya” (*we know how to solve a problem, but cannot do it*), misalnya untuk mencari solusi persamaan diferensial parsial nonlinier dari aliran panas transien tidak jenuh, di mana tidak ada solusi analitiknya. Disini Ilmu Komputasi berperan agar: “Kita tahu bagaimana menyelesaikan suatu masalah dan dapat melakukannya” (*we know how to solve a problem and can do it*), misalnya solusi diperoleh dengan menuliskan persamaan tersebut dalam bentuk persamaan diferensial dengan syarat batas. Kemudian diskretisasi dengan metode beda hingga sehingga diperoleh sistem persamaan simultan yang dapat dipecahkan dengan cara iterasi Gauss-Seidel. Karena sulitnya masalah, maka ada harga yang mesti dibayar untuk prestasi ini, yaitu: “Kita harus puas dengan solusi pendekatan yang sedikit meleset”, dengan keyakinan bahwa solusi pendekatan tidak jauh berbeda dari solusi sebenarnya yang kita tidak tahu, dan hasil yang meleset masih jauh lebih baik dari pada tidak ada solusinya sama sekali. Yang penting harus dapat mengendalikan kemelesetan lewat strategi *check & re-check*, konfirmasi, *benchmarking* dan validasi, sehingga solusi pendekatan dapat dipertanggung-jawabkan dan sukses diterapkan di teknologi modern.

## A.2. Modal Data dan Solusi Sebenarnya

Jika kembali ke ilmu komputasi, maka inti dari bidang ilmu ini adalah: “Apa modal data yang kita miliki?, Apa hasil solusi ideal atau tepat yang kita inginkan?”, dan faktanya: “Apa hasil solusi komputasi atau pendekatan yang sanggup kita peroleh?”. Berikut adalah uraian secara garis besar berbagai masalah yang akan dibahas di tulisan ini:

1. Modal data kita adalah suatu matriks dan vektor, dan solusi sebenarnya yang kita cari adalah vektor dan/atau skalar. Maka solusi pendekatan yang kita peroleh juga vektor dan/atau skalar yang mesti dekat dengan solusi sebenarnya yang tidak kita ketahui.
2. Modal data kita adalah suatu fungsi, dan solusi sebenarnya yang kita cari adalah suatu skalar. Maka solusi pendekatan yang kita peroleh juga skalar yang mesti dekat dengan solusi sebenarnya yang kita tidak ketahui.
3. Modal data kita adalah suatu vektor, dan solusi sebenarnya yang kita cari adalah suatu fungsi. Maka solusi pendekatan yang kita peroleh adalah fungsi yang harus dekat dengan solusi sebenarnya yang tidak kita ketahui.
4. Modal data kita adalah gambaran mikro suatu proses, dan solusi ideal yang kita cari adalah gambaran makro yang benar. Maka solusi pendekatan yang kita peroleh ialah gambaran makro simulasi yang mendekati gambaran benar yang kita tahu dari eksperimen.

5. Modal data kita adalah suatu persamaan diferensial dengan nilai awal dan/atau nilai batas, juga persamaan integral dan integrodiferensial, dan solusi sebenarnya yang kita cari ialah suatu fungsi. Maka solusi pendekatan yang kita peroleh dapat berupa vektor atau fungsi yang harus dekat dengan solusi sebenarnya yang kita tidak ketahui.

Tentu saja tidak mudah menemukan solusi masalah berskala raksasa, multidisipliner, multikomponen, tidak-linear, dan bersifat kebalikan. Semua ini adalah masalah Invers yang sulit dan selalu kita hadapi di era modern. Ciri masalah invers adalah bagaimana dari data yang sedikit (*insufficient*), tidak akurat (*inaccurate*), atau data berlebih tetapi saling bertentangan (*inconsistent*), dituntut sebanyak mungkin diambil kesimpulan yang secara ilmiah dapat dipertanggung-jawabkan.

## B. Pemahaman Sistem

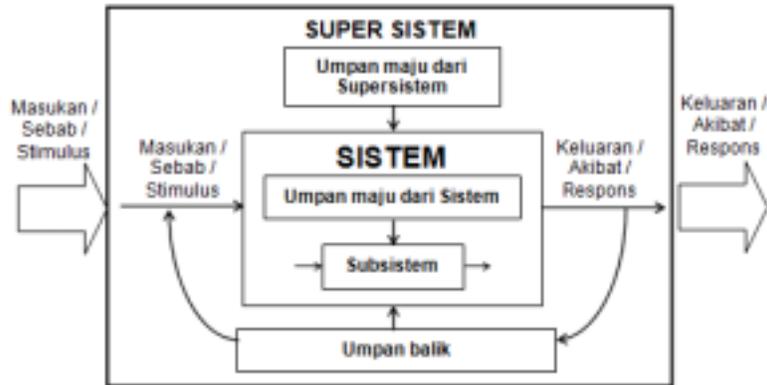
Teori sistem menjadi kerangka acuan untuk memahami suatu fenomena, gejala atau peristiwa. Sistem adalah kumpulan dari banyak bagian atau komponen yang terintegrasi menjadi satu kesatuan, yang antara satu komponen dengan komponen lain saling bergantung, saling berinteraksi dan saling bekerjasama secara sinergistik guna mencapai tujuan bersama. Setiap bagian atau komponen dari sistem memiliki batas dan peran yang jelas di dalam sistem. Bagian atau komponen dari sistem biasanya juga memiliki struktur sistem yaitu subsistem, dan subsistem terdiri dari bagian yang lebih kecil lagi yaitu sub-subsistem, dan seterusnya. Sistem sendiri adalah bagian atau komponen dari sistem yang lebih besar yaitu supersistem, dan supersistem adalah bagian dari super-supersistem, dan seterusnya. Setiap sistem memiliki masukan-masukan dan keluaran-keluaran. Tugas utama setiap sistem adalah sebagai pengelola yang mengolah masukan (sebab atau stimulus) dari suatu sistem menjadi keluaran (akibat atau respons) ke sistem lain atau sebagai umpan maju dari sistem ke subsistem. Sebuah keluaran bisa juga menjadi masukan ke sistem itu sendiri yang disebut “umpan balik” yang berfungsi untuk mengendalikan sistem agar tetap stabil.

Adanya saling ketergantungan, interaksi dan kerjasama antar sistem di dalam supersistem, dan juga antar subsistem di dalam sistem, dapat disimpulkan sebagai berikut:

- Sistem umumnya bersifat terbuka, yaitu mau dan mampu menerima masukan dari sistem lain atau supersistem, serta mau dan mampu menghasilkan keluaran yang diperlukan sistem lain.
- Sistem bersifat terbuka dan adaptif jika dapat beradaptasi dengan sesama sistem dan dengan supersistem.
- Sistem bersifat tertutup jika tidak mau menerima masukan dari sistem lain dan tidak mampu menghasilkan keluaran bagi sistem lain.

- Sistem terbuka bersifat dinamik dan adaptif karena mudah berubah dengan waktu, sedangkan sistem tertutup bersifat statik karena sulit berubah seperti katak dalam tempurung.

Antara masukan dan keluaran suatu sistem ada kaitan sebab-akibat atau kaitan stimulus-respons, yang dalam persamaan matematika dipresentasikan sebagai hubungan antara peubah bebas dengan peubah terkait.



Gambar 1.3 - Bagan Sistem dan komponen-komponennya

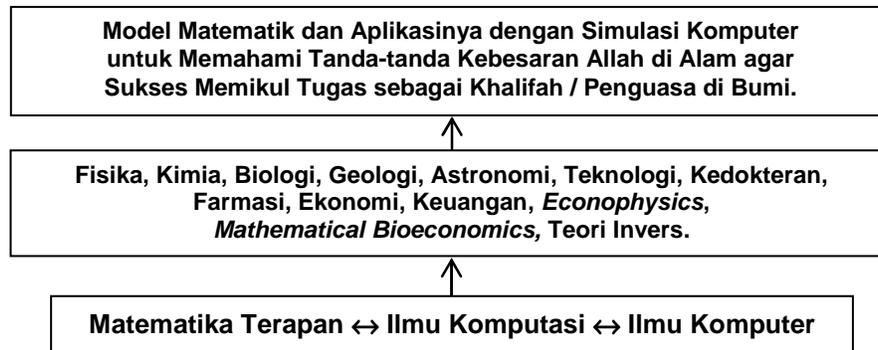
Setiap sistem harus menjalankan tugas dan fungsi mereka sebaik mungkin agar dapat memuaskan sistem lain atau supersistem. Interaksi dan kerjasama antar sistem harus ada, karena sistem tidak mungkin bertahan hidup sendiri-sendiri. Sebagai contoh manusia sebagai individu, secara naluriah memiliki pengetahuan, indera dan pengalaman untuk mengakses lingkungannya dan mengembangkan dirinya. Manusia selaku sistem akan mengulang dan memperbaiki persamaan dan pertidaksamaan peubah bebas dan peubah terkait yang terjadi selama kehidupannya. Secara fisik manusia terdiri dari subsistem-subsistem berupa: kepala, badan, tangan dan kaki. Sebagai makhluk sosial, manusia hidup bermasyarakat dan berinteraksi dengan manusia-manusia lain dalam suatu lingkungan hidup atau ekosistem sebagai supersistemnya. Manusia sebagai makhluk ciptaan Allah demikian juga alam semesta disekitarnya adalah sistem asli buatan Allah. Akan tetapi untuk memahami anatomi tubuh manusia maka dibuat tiruan rangka atau organ tubuh manusia dari plastik, yang disebut dengan model atau imitasi dari sistem. Jadi sistem dapat berupa sistem asli dan model yaitu tiruan atau imitasi dari sistem asli.

## B.1. Sistem Asli

Manusia oleh Allah dianugerahi otak dan daya cipta sehingga dapat membuat alat, karya seni dan produk teknologi. Banyak hasil karya manusia yang diperoleh lewat kemampuan daya cipta, penguasaan ilmu pengetahuan dan teknologi serta pengalaman hidupnya. Jadi sistem asli dapat dibagi dua yaitu sistem alam ciptaan Allah dan sistem teknologi buatan manusia.

### B.1.1. Sistem Alam Ciptaan Allah

Sistem alam ciptaan Allah memperlihatkan tanda-tanda kebesaran Allah, mulai dari ciptaan Allah ukuran kecil dalam orde nanometer sampai milimeter seperti: atom, elektron, sel, virus dll. Kemudian ciptaan Allah ukuran sedang dalam orde milimeter sampai kilometer seperti: manusia, tanaman, hewan, gunung, laut, matahari, bumi, bulan, dll. Setelah itu ciptaan Allah ukuran raksasa dalam orde tahun-cahaya seperti: galaksi Bima Sakti (berisi lebih dari 100 milyar bintang dengan diameter  $\pm 100.000$  tahun-cahaya), *black body*, *black hole*, *galaxy cluster*, dan alam semesta yang berisi lebih dari 50 milyar galaksi, dan tiap galaksi menyerupai Bima Sakti.



Gambar 1.5 - Bagan berpikir holistik dan berwawasan sistem

Sistem alam kita pelajari lewat ilmu-ilmu dasar seperti fisika, biologi, kimia, astronomi, dan juga ilmu-ilmu terapan seperti kedokteran, farmasi, pertanian, dan ilmu terapan lainnya. Untuk memahami bidang ilmu maka dikembangkan cabang-cabang ilmu dasar sebagai ilmu bantu atau penunjang berupa matematika terapan, ilmu komputasi dan ilmu komputer yang saling berinteraksi. Berbagai disiplin ilmu dikembangkan agar manusia lebih memahami sistem alam dan penciptaannya. Antara masukan dan keluaran suatu sistem alam terdapat kaitan sebab-akibat yang jika bersifat kualitatif disebut gejala alam, sedangkan jika bersifat kuantitatif disebut hukum alam

(*sunnatullah*). Ilmu pengetahuan alam berusaha memahami alam secara kualitatif, sedangkan matematika dan komputasi menggambarkan alam secara kuantitatif. Tulisan ini berisi banyak hukum kuantitatif alias model matematik dan aplikasinya untuk simulasi komputer yaitu untuk membantu manusia agar mengerti alam lebih dalam dan luas dalam tugasnya sebagai khalifah di muka bumi, tanpa melampaui batas dan tidak membuat kerusakan di muka bumi, seperti menghindari pemanasan global. Sikap mensyukuri nikmat serta karunia Allah dilakukan dengan mengingatnya Allah dan ciptaan-ciptaanNya sambil berdiri, duduk atau berbaring, demikian juga mengingat nasib generasi yang akan datang yang menjadi tanggung jawab manusia dalam tugasnya sebagai khalifah dan penguasa di bumi.

Matematika 100% adalah hasil karya manusia, tentu saja setelah mendapat restu dan petunjuk dari Allah Maha Pemberi Petunjuk, sedangkan ilmu pengetahuan alam (fisika, kimia, biologi, dll.) 100% dari Allah yang Maha Pencipta. Hebatnya matematika dengan ilmu pengetahuan alam 100% cocok, artinya matematika sejalan dengan perintah Allah sehingga timbul Fakultas Matematika & Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), karena matematika dengan ilmu pengetahuan alam, dan juga matematika dengan teknologi dan manajemen saling memerlukan dan saling mengisi. Inilah salah satu kehendak Allah di balik kemajuan ilmu pengetahuan, teknologi dan manajemen. Konsistensi matematika sebagai karya manusia dengan fisika sebagai ciptaan Allah tampak dari fakta berikut. Di matematika ada persamaan diferensial, di fisika ada mekanika klasik, kecepatan dan percepatan. Di matematika ada nilai pribadi (*eigenvalue*), di fisika ada frekuensi yang menghasilkan nilai frekuensi (*eigenfrequency*). Kemudian di matematika ada komputasi yang melahirkan fisika komputasi, kimia komputasi, biologi komputasi, rekayasa komputasi, kedokteran komputasi, ekonomi komputasi, dll.

### **B.1.2. Sistem Teknologi Buatan Manusia**

Sistem teknologi buatan manusia misalnya mobil, kapal laut, pesawat terbang, pesawat antariksa, pembangkit listrik, reaktor nuklir, komputer, gigi palsu, kacamata, dan organisasi. Hasil karya manusia dipelajari lewat rekayasa, teknologi, informatika, farmasi, pertanian, ilmu manajemen, dan lainnya. Sukses dalam sistem teknologi didapat setelah kita menguasai ilmu pengetahuan, dan ini sesuai dengan kehendak Allah agar kita sukses memikul tugas khalifah di bumi. Dari pengalaman, ternyata kita belajar dari fakta-fakta yang pahit. Jika suatu sistem teknologi selesai dibuat dan kemudian dioperasikan, maka sistem ini menjadi subsistem dari sistem alam di mana sistem teknologi beroperasi, dengan segala akibatnya. Misalnya, industri mobil dan AC dalam jumlah besar menghasilkan limbah dan asap industry. Asap mobil dan asap AC menyebabkan lingkungan tercemar sehingga menimbulkan pemanasan global. Semua ini adalah karena manusia

relatif lemah dan bodoh menghasilkan sistem teknologi relatif primitif sehingga sistem yang dibuat untuk tujuan positif ternyata berdampak negatif dalam dimensi ruang dan waktu. Padahal Allah telah mengingatkan kita agar jangan melampaui batas dan jangan membuat kerusakan di Bumi, masing-masing diulang sekitar 50 kali di dalam Al Quran.

Jadi kita mesti gunakan komputasi untuk tahu batas kuantitatif yang tak-boleh kita lampau agar tidak merusak bumi. Ini analog dengan dosis obat dan batas kadaluwarsa suatu produk yang tak-boleh kita lampau. Inilah bukti keterbatasan kemampuan kita berpikir holistik dan futuristik, karena produsen dan konsumen hanya memikirkan nikmat instan yaitu tergesa-gesa (QS. 17:11) dan tidak sabar (QS. 3:142). Pemerintah juga hanya berpikir instan yaitu asal pajak yang masuk ke kas negara. Pemahaman sistem alam dan sistem teknologi dan interaksi di antara keduanya dalam dimensi ruang dan waktu perlu didukung dengan pemahaman secara mikro yaitu untuk mengerti unsur-unsur pembentuk sistem secara sempit dan mendalam. Pengertian mikro diperlukan untuk menganalisis sistem dan kemudian berpikir reduksionistik. Dari pemahaman mikro dijabarkan untuk memperoleh pengertian makro untuk memahami sistem secara keseluruhan dan kaitannya dengan sistem lain atau supersistem sehingga diperoleh sintesis sistem dan kemampuan berpikir secara holistik.

Dari fakta di atas tampak bahwa kita perlu berwawasan sistem. Jika kita meneliti sesuatu, kita mesti sadar bahwa objek yang kita teliti adalah suatu sistem alam atau sistem teknologi. Inilah inti dari belajar dengan berwawasan sistem. Proses belajar ini dilakukan secara bertahap untuk mengerti sistem. Pertama, sistem sebagai kotak hitam, kemudian menjadi kotak abu-abu, dan akhirnya menjadi kotak jernih, yang dikenal sebagai analisis sistem atau identifikasi sistem. Jika kita sadar bahwa objek yang kita pelajari adalah sistem, berarti kita mesti sadar bahwa objek:

- a) terdiri dari banyak subsistem yang saling berinteraksi atau bekerjasama,
- b) dapat atau perlu menerima masukan atau stimulus dari luar, dan dapat atau perlu memberi hasil keluaran, respons atau reaksi ke luar, dan
- c) sistem teknologi juga berinteraksi dengan supersistem di mana ia beroperasi sehingga menimbulkan interaksi positif misalnya membuka lapangan kerja, dan interaksi negatif misalnya menyebabkan polusi.

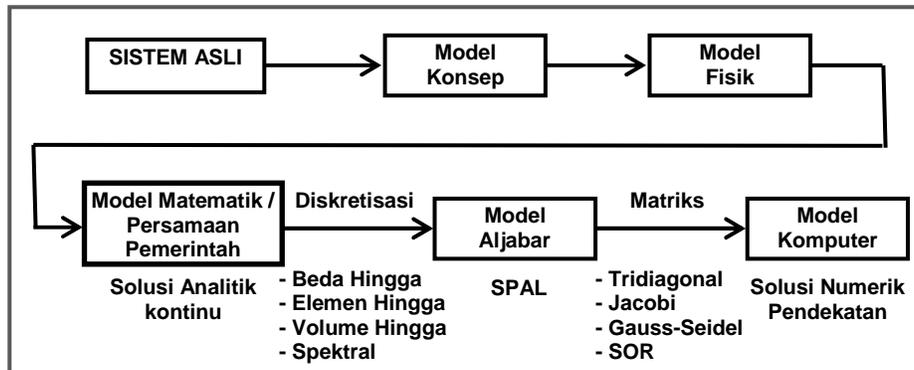
Di awal bukunya, Zienkiewicz & Taylor menyatakan bahwa batas dari kemampuan berpikir manusia adalah sulit untuk memahami perilaku alam dan penciptaan sekelilingnya, disebabkan rumitnya. Oleh karena itu, proses untuk memahaminya adalah membagi sistem menjadi komponen-komponen atau elemen-elemen yang perilakunya sudah dipahami, secara sendiri-sendiri, dan kemudian membangun kembali sistem dari komponen-komponennya dalam mempelajari perilaku sistem tersebut. Ini adalah cara yang wajar dilakukan

oleh perekayasa, ilmuwan, demikian juga ahli ekonomi. Demikian juga pernyataan di awal buku Amirouche bahwa bagian yang terpenting dari perancangan rekayasa moderen adalah dapat menganalisis dan meramalkan perilaku dinamis dan kinerja suatu sistem di dunia nyata, yang umumnya sangat rumit dan sulit untuk dianalisa. Dalam banyak kasus biasanya sistem terdiri dari berbagai komponen yang bertindak bersama seperti satu kesatuan. Untuk menganalisa dan mempelajari sistem seperti ini, setiap komponen harus dikenali dan ditentukan sifat-sifat fisiknya. Jika sifat dari masing-masing komponen sudah diketahui, maka suatu model matematik dapat dibangun untuk menggambarkan wujud dari sistem yang diinginkan.

Di lain pihak, ketika menghadapi dinamika tak-linear, kita terpaksa lebih banyak berpikir holistik. Sebagai contoh pada matakuliah anatomi tubuh manusia, akan menyadarkan para mahasiswa kedokteran bahwa tubuh manusia adalah suatu sistem rumit dengan subsistem: kepala, tangan, badan, dll. Ternyata kepala juga subsistem rumit dengan sub-subsistem: mata, telinga, hidung, dll. Mata, meski berukuran sekitar 5 cm, adalah sub-subsistem yang amat rumit. Seorang dokter umum harus belajar kurang lebih 3 tahun untuk menjadi spesialis mata. Seorang spesialis mata hanya tahu sedikit tentang telinga, hidung dan tenggorokan (THT), dan spesialis THT hanya tahu sedikit tentang mata, padahal posisi THT dan mata terletak di kepala dan keduanya berjarak hanya beberapa centimeter. Adanya spesialisasi adalah akibat dari sifat manusia yang lemah dan bodoh (QS. 4:28, 33:72) sehingga manusia terpaksa berpikir sempit atau reduksionistik. Tetapi ketika seorang pasien sakit berat, banyak dokter dari berbagai spesialisasi harus bekerjasama secara sinergis untuk menghadapi penyakit berat ini, yang dari sudut pandang para spesialis, hal ini termasuk masalah multidisipliner.

## **B.2. Model / Tiruan / Imitasi Sistem**

Jika meneliti suatu sistem, biasanya kita tidak langsung meneliti sistem asli, tetapi kita meneliti tiruan atau imitasi dari sistem asli yang disebut model. Para ilmuwan menggunakan istilah model untuk menggambarkan sesuatu yang bisa diuji oleh eksperimen atau pengamatan, agar berhasil mengerti sistem. Dalam aspek tertentu, model yang dipilih harus dapat mewakili atau memiliki sifat mirip dengan sifat sistem asli. Dengan demikian, apapun kesimpulan yang kita tarik dari model, kesimpulan ini hampir sama dengan apa yang kita dapat andaikan kita meneliti sistem asli. Ada lima jenis model sistem, yaitu: model konsep, model fisik, model matematik, model aljabar dan model komputer, yang digunakan para siswa, mahasiswa dan ilmuwan dalam mempelajari atau meneliti suatu sistem.



Gambar 1.4 - Sistem asli dan lima model tiruan sistem

### B.2.1. Model Konsep

Model Konsep adalah pemikiran atau penalaran manusia ketika melihat dan mengamati suatu gejala, fenomena atau peristiwa baru mengenai suatu sistem. Manusia menerima informasi, mengolah informasi tersebut, dan memberikan jawaban terhadap masalah setiap saat. Cara manusia mengolah dan memahami informasi pada dasarnya disebut model konsep atau model mental. Setelah melalui suatu analisis, model konsep ini dapat berubah menjadi hipotesis, yaitu dugaan tentang sifat atau dinamika sistem serta penyebabnya. Hipotesis adalah jawaban sementara terhadap masalah yang masih bersifat praduga karena masih harus dibuktikan kebenarannya. Model konsep atau hipotesis ini mungkin merupakan hal baru bagi kita dan kebenarannya belum terbukti, maka tahap berikutnya adalah, kita harus berusaha membuktikan kebenaran hipotesis tadi, misalnya dengan eksperimen pada model fisik yang hasilnya secara ilmiah lebih dapat diterima, apakah membenarkan hipotesis atau sebaliknya. Hipotesis menjadi teruji apabila semua gejala yang timbul tidak bertentangan dengan hipotesis tersebut. Hipotesis yang telah teruji kebenarannya disebut teori sebagai jawaban dari berbagai kenyataan di alam.

### B.2.2. Model Fisik

Model Fisik adalah tiruan atau imitasi dari sistem asli, berupa benda yang dapat diamati dan dilakukan berbagai eksperimen dengan cara kepada model fisik diberi beberapa masukan, kemudian kita amati keluaran atau respons dari model fisik tersebut. Asas yang kita gunakan dalam eksperimen adalah langsung melihat dinamika model sehingga memberikan keyakinan alias *“seeing directly is believing”*, diikuti dengan melakukan analisis agar mengerti alias *“analyzing is understanding”*. Dari eksperimen dapat ditarik

informasi mengenai sifat sistem dan membuktikan apakah hipotesis salah atau benar, dan hipotesis menjadi teori jika terbukti benar. Dari eksperimen pada model fisik, mengingat adanya kemiripan sifat model fisik dengan sifat sistem asli, maka kita dapat berasumsi lewat penalaran induktif, bahwa informasi apapun yang didapat dari eksperimen pada model fisik dapat dianggap sebagai informasi dari sistem asli, yaitu kejadian khusus yang diberlakukan secara umum, alias generalisasi.

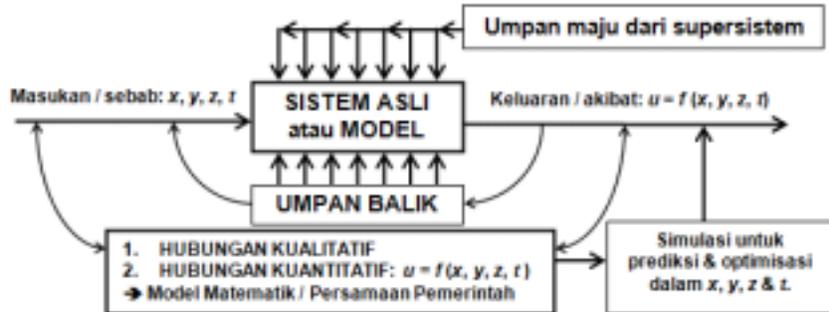
Model fisik yang disukai anak-anak ialah mainan berupa: mobil, kapal, pesawat, boneka, dan sebagainya. Di laboratorium fisika, kimia, biologi, dll. para mahasiswa belajar lewat praktikum dengan model fisik. Sopir mobil tahu berapa kira-kira sisa bensin di tangki mobil tanpa perlu melihat bensin didalam tangki, tetapi cukup melihat meteran bensin atau sama dengan model fisik di *dashboard* mobil. Dan jika beli bensin di SPBU, berapa liter bensin yang masuk tanki dan berapa rupiah yang mesti dibayar oleh sopir ternyata ada terlihat di meteran bensin atau model fisik di SPBU, tanpa harus melihat bensin di tangki. Jam tangan atau jam dinding juga model fisik dari dinamika waktu yang berjalan sehari-hari. Model sistem dapat berupa gambar geometrik, misalnya peta Jakarta, peta Indonesia dan dapat berupa maket seperti model bangunan atau model anatomi tubuh manusia dari plastik untuk dipelajari mahasiswa kedokteran. Arsitek merancang gambar bangunan dalam suatu sketsa yang disebut model bangunan, dan agar dapat memberikan gambaran penglihatan dan perasaan yang lebih nyata maka dibuat maket bangunan yaitu bangunan dalam ukuran skala diperkecil yang disebut model fisik dari bangunan sebenarnya.

Di bidang statistik, model dikiaskan dengan sampel atau cuplikan yang dianggap mewakili populasi atau sistem asli. Jadi informasi apapun yang didapat dari eksperimen pada cuplikan dianggap sama atau mendekati sifat populasi. Jika seorang ilmuwan pertanian melakukan eksperimennya di sebuah kebun percobaan, maka yang ia teliti adalah sistem asli, yaitu tanaman sebenarnya. Tetapi dilihat dari sudut pandang statistik, hasil dari kebun percobaan ini hanyalah cuplikan, yaitu model dari populasi berupa tanaman sejenis di daerah yang lebih luas, asal kondisi lingkungannya sama. Demikian Hukum fisika atau hukum alam adalah generalisasi ilmiah berdasarkan pengamatan empiris dari suatu model fisik di alam.

### **B.2.3. Model Matematik atau Persamaan Pemerintah (MM/PP)**

MM/PP yaitu persamaan matematik yang meniru kaitan kuantitatif antara masukan (sebab) dengan keluaran (akibat) dari sistem asli. Model matematik sekarang populer disebut persamaan pemerintah (*governing equation*) karena Allah menundukkan alam dan menguasai serta mengendalikan dinamika sistem alam melalui perintah-Nya. Sifat atau dinamika sistem alam mutlak tunduk pada MM/PP ini sebagai hukum alam

yang tidak tertulis (*al-Kauni*) sesuai firmanNya: “Semua di alam tunduk kepada perintah Allah” (QS. 14:32-33, 45:12-13). Oleh karena itu MM/PP suatu sistem dapat didefinisikan sebagai suatu persamaan matematika yang menentukan pergerakan dari sistem. Jika masukan ke sistem atau sebab adalah peubah bebas  $x, y, z, t$ , maka keluaran dari sistem atau akibat adalah peubah terikat  $u$  yang merupakan fungsi dari peubah bebas  $x, y, z, t$  atau dapat ditulis  $u = f(x, y, z, t)$ . Gambar 1.6 memperlihatkan gambaran skematik MM/PP dari suatu sistem asli atau model.



Gambar 1.6 – Gambaran skematik MM/PP suatu sistem

Sebagai contoh, jika kita membuat secangkir teh panas dengan suhu awal sekitar  $100^{\circ}\text{C}$  ( $T_0 = \pm 100^{\circ}\text{C}$ ), kemudian teh dibiarkan di meja makan maka suhu teh  $T$  akan turun dengan berjalannya waktu  $t$  menuju ke suhu keseimbangan. Menurut hukum perpindahan panas, suhu akhir sama dengan suhu kamar sekitar  $30^{\circ}\text{C}$  ( $T_k = \pm 30^{\circ}\text{C}$ ). Secara matematik dikatakan bahwa  $T$  adalah fungsi dari  $t$ , alias  $T(t)$ , dan sebagai syarat awal  $T(0) = T_0$ . MM/PP perpindahan panas ini adalah persamaan diferensial:

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda(T - T_k), \quad \lambda > 0, \quad (1.1)$$

yang dapat diartikan bahwa kecepatan turunnya suhu teh sebanding dengan selisih antara suhu teh dengan suhu kamar dikali konstanta panas  $\lambda$  sebagai parameter yang menentukan cepat atau lambatnya proses pendinginan. Jika  $\lambda$  kecil, misalnya teh panas disimpan di termos, maka pendinginan lambat. Jika  $\lambda$  besar maka proses pendinginannya cepat, misalnya teh panas diletakkan di piring dan ditiup, disebut dengan perpindahan panas secara konveksi paksa. Solusinya secara analitik adalah persamaan:

$$T(t) = (T_0 - T_k) e^{-\lambda t} + T_k \quad (1.2)$$

Di sini kita lihat dua model matematik yang menggambarkan dinamika satu masalah, yang satu berbentuk persamaan diferensial dengan syarat

awal, dan yang lain persamaan aljabar alias solusi dari persamaan diferensial dengan syarat awal. Untuk menguji model aljabar, kita tahu bahwa  $e^{-\lambda t} = 1$  jika  $t = 0$  sehingga diperoleh  $T(0) = T_0 = 100^\circ\text{C}$ , dan  $e^{-\lambda t}$  mendekati 0 jika  $t$  besar, maka  $T(t) = T_k = 30^\circ\text{C}$  atau suhu kamar. Contoh ini menyadarkan kita bahwa proses pendinginan teh sebagai bagian dari hukum fisika termodinamika adalah hukum Allah yaitu *sunnatullah* kualitatif, sedangkan model matematika atau persamaan pemerintah dan solusinya adalah hukum Allah yaitu *sunnatullah* kuantitatif. *Sunnatullah* kualitatif dipelajari lewat berbagai bidang ilmu, misalnya: fisika, kimia, biologi, geologi, dll., sedangkan *sunnatullah* kuantitatif dipelajari dengan bantuan matematika, statistika, dan di era modern juga dibantu model matematik, komputasi dan simulasi komputer yang lebih cepat dan lebih canggih.

MM/PP sudah diketahui dan digunakan ratusan tahun yang lalu sejak era Archimedes, Pythagoras, Euclides, kemudian pada era Pascal, Newton, Maxwell, Gauss, Laplace, Lagrange, Taylor, Hamilton, dsb. Pada akhir abad ke-19 sampai awal abad-20 dilanjutkan oleh Navier, Stokes, Poincaré, Hilbert, Einstein, Schrödinger, Bohr, Heisenberg, Hubble, dll., kemudian diikuti ilmuwan modern seperti Gell-Mann, Hawking, Penrose, Feynman, Wolfram, dll. Mereka menggunakan MM/PP dari sistem untuk simulasi yaitu untuk mengerti dan meramal dinamika sistem alam. Perlu diketahui bahwa sistem alam umumnya bersifat dinamik yaitu kondisinya berubah dalam dimensi ruang atau waktu. Karena itu MM/PP sistem alam pada umumnya berbentuk persamaan diferensial yang menunjukkan kecepatan perubahan (*rate of change*) terhadap ruang dan/atau waktu sehingga topik “persamaan diferensial biasa” (PDB) dan “persamaan diferensial parsial” (PDP) serta aplikasinya mengisi setengahnya tulisan ini. Dari segi kerumitan dinamika sistem, dibedakan dinamika linear dan dinamika tak-linear. Dinamika suatu sistem dikatakan linear adalah jika antar subsistem ada interaksi lemah, dan tak-linear jika antar subsistem ada interaksi kuat. Dinamika tak-linear yang berlaku dalam sistem alam pada umumnya, baru dipahami sejak majunya perkembangan komputer dan komputasi di era 1980-an.

Ada dua cara yang dapat ditempuh untuk memperoleh MM/PP suatu sistem, yaitu secara empiris dan secara teoritis. Model empirik ini adalah modal untuk interpolasi memprediksi masa lalu misalnya teori *big bang* dari Hubble atau diekstrapolasi sebagai ramalan masa depan. Sedangkan model teoritik menyangkut sifat fisik subsistem atau sintesis sistem yang dibantu dengan berbagai postulat matematika yang berlaku universal. MM/PP yang diperoleh secara teoritik dapat berbentuk persamaan aljabar, persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial parsial, persamaan integral atau integrodiferensial, dan model geometrik / teori graf. Disini tidak dibahas pemodelan teoritik, karena tulisan dipusatkan pada usaha mencari solusi komputasi dari model dengan metode numerik, dengan asumsi bahwa teori model telah diketahui. Mencari model adalah tugas utama masing-masing bidang ilmu, baik fisika, kimia, biologi, geologi, rekayasa, kedokteran,

ekonomi, keuangan, dll. Sedangkan matematika dan komputasi membantu mencari solusi dari model tersebut melalui pengolahan data dan simulasi. Solusi MM/PP ada dua yaitu menggunakan metoda analitik atau dengan metoda numerik. Metode analitik disebut juga metode sejati karena menghasilkan solusi sejati (*exact solution*) atau solusi yang sesungguhnya dalam bentuk fungsi matematik yang selanjutnya fungsi tersebut dapat dihitung untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka.

Sebagai contoh adalah kurva tanggap (*response curve*) yaitu respons atau keluaran sistem jika diberi masukan atau stimulus tertentu. Jika peubah takbebas  $u$  bergantung pada dua peubah bebas  $x, y$  maka diperoleh permukaan tanggap (*response surface*) dengan MM/PP sederhana yang berbentuk persamaan aljabar secara umum berbentuk:

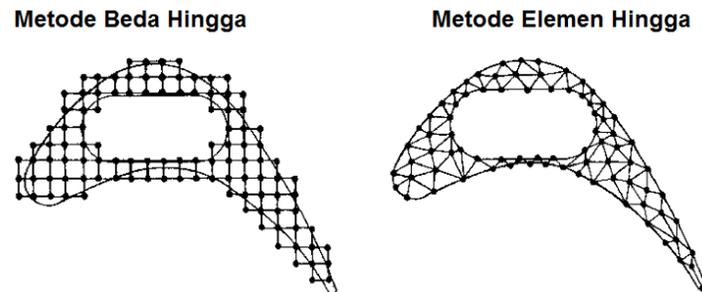
$$\text{peubah takbebas} = f(\text{peubah bebas}, \text{parameter}, \text{pengaruh luar})$$

Persamaan ini menunjukkan adanya saling keterkaitan kuantitatif antara peubah bebas, yaitu masukan biasanya dalam dimensi ruang  $x, y, z$  dan waktu  $t$ , parameter atau konstanta alam (*natural constants*) seperti  $\lambda$  pada model  $L_t = L_0 (1 + \lambda t)$  atau  $N_t = N_0 e^{-\lambda t}$ , dan pengaruh luar misalnya gaya luar, sumber panas, tegangan, dengan peubah tak-bebas  $u$  yaitu hasil keluaran berupa jumlah, posisi, suhu, fluks, potensi, dan sebagainya. Jika merupakan persamaan aljabar sederhana maka solusi analitiknya dapat diperoleh dengan mudah berupa fungsi kontinu, artinya untuk setiap nilai peubah bebas akan menghasilkan nilai yang berkesinambungan. Akan tetapi apabila MM/PP merupakan persamaan kompleks, misalnya PDP taklinier, akan sulit mencari solusi analitiknya sehingga harus dengan metode numerik yaitu dengan mencari model aljabar dari persamaan tersebut untuk diselesaikan komputer.

#### **B.2.4. Model Aljabar**

Model aljabar mengubah MM/PP kompleks seperti PDP taklinier menjadi bentuk sistem persamaan aljabar linier (SPAL) yang lebih sederhana lewat proses diskretisasi tubuh, struktur atau domain solusi dalam ruang dan waktu. Penyelesaian umum PDP adalah dengan menuliskan persamaan tersebut dalam bentuk persamaan diferensial dengan syarat-syarat batas. Dengan metode numerik, masalah fungsi kontinu didekati dengan sejumlah nilai diskrit sehingga menjadi masalah vektor, atau masalah kalkulus menjadi masalah aljabar. Terdapat 4 (empat) macam teknik diskretisasi domain yaitu: beda hingga (*finite difference*), elemen hingga (*finite element*), volume hingga (*finite volume*) dan metode spektral. Solusi metode ini akan menghasilkan galat (*error*) diskretisasi yaitu perbedaan antara nilai pendekatan dengan nilai sejatinya. Pada metode beda hingga, diskretisasi domain ruang dan/atau

waktu diubah menjadi sub-domain berbentuk segi-empat kecil atau kisi-kisi. Kemudian dilakukan ekspansi dengan deret Taylor untuk membangun rumus beda hingga, yang akan mengubah persamaan diferensial menjadi pendekatan beda hingga. Dengan membagi daerah dalam bentuk kisi-kisi maka diperoleh SPAL yang simultan yang dapat dipecahkan dengan cara iterasi misalnya dengan metode Gauss-Seidel.



Gambar 1.8 – Diskretisasi struktur atau domain

Apabila bentuk domain tidak beraturan dianjurkan menggunakan metode elemen hingga. Dengan metode elemen hingga, proses diskretisasi dilakukan dengan membagi domain menjadi elemen-elemen. Pembagian akan lebih luwes karena elemen bisa berbentuk garis, segi tiga, segi empat, heksahedron dsb. sehingga tingkat galat diskretisasi menjadi kecil. Pencarian penyelesaian untuk setiap elemen dilakukan dengan pendekatan polinomial derajat dua (parabolik). Penyelesaian untuk setiap elemen dilakukan dengan pendekatan polinomial derajat dua (parabolik). Kemudian menggabungkan persamaan-persamaan elemen menjadi persamaan global dengan menerapkan beban-beban yang diketahui dan diposisikan terhadap syarat-syarat batas, sehingga dihasilkan SPAL dengan ukuran raksasa. SPAL yang terdiri dari sejumlah persamaan berhingga dan sejumlah peubah yang juga berhingga merupakan model aljabar yang banyak dijumpai dalam mencari solusi numerik PDP taklinier. Solusinya adalah nilai peubah-peubah yang memenuhi semua sistem persamaan yang ada yang dapat dihitung dengan metode langsung, metode faktorisasi atau metode iterasi.

### B.2.5. Model Komputer

Penyelesaian masalah dengan metode numerik membutuhkan peralatan komputer dan urutan-urutan operasi yang disebut algoritma. Metode artinya cara, sedangkan numerik artinya angka. Jadi metode numerik secara harafiah berarti cara mengolah angka-angka menggunakan operasi aritmetika seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan membuat perbandingan. Algoritma sebagai prosedur pengolahan

angka-angka digambarkan dalam bentuk bahasa yang sederhana, *pseudocode*, *flowcharts*, bahasa pemrograman atau tabel-tabel kendali. Model komputer akan mengubah model aljabar (SPAL) menjadi algoritma dalam bentuk program yang disimpan di dalam memori komputer. Terdapat tiga metode untuk mencari solusi SPAL yaitu metode langsung, metode faktorisasi dan metode iterasi. Metode langsung mencari solusi nilai pribadi matriks yang tepat dalam sejumlah langkah-langkah tertentu dengan menerapkan operasi baris elementer yaitu operasi perubahan nilai elemen matriks berdasarkan barisnya, tanpa mengubah matriksnya. Dengan metode iteratif, galat pembulatan dapat diperkecil, karena iterasi dapat dilakukan sampai batas ralat sekecil mungkin yang diperbolehkan.

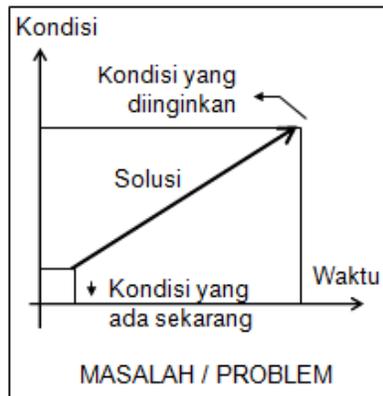
Pengalaman mengajarkan bahwa alam semesta ini demikian kompleks, rumit dan taklinear, sehingga usaha mencari model matematik sistem alam juga sulit. Jika model matematik suatu sistem sulit dicari secara deterministik maka sistem dapat dicoba disimulasikan secara stokastik langsung dari sifat-sifat fisiknya, misalnya dengan simulasi Monte Carlo atau dinamika molekular. Dengan simulasi Monte Carlo dibangkitkan bilangan acak seperti lemparan dadu untuk menentukan suatu proses, arah dan jenis kejadian yang tidak tergantung pada peubah ruang atau peubah waktu, dan demikian juga turunan dari ruang maupun turunan dari waktu bukan merupakan parameter hakiki dari solusi. Artinya dengan metode Monte Carlo sebetulnya tidak dibutuhkan MM/PP untuk memecahkan masalah, tetapi langsung meniru eksperimen yang terjadi langkah demi langkah. Simulasi Monte Carlo merupakan eksperimen matematika yang ternyata sangat sukses membantu mencari solusi banyak masalah Invers terutama sistem dengan dimensi atau derajat kebebasan yang besar. Masalah evolusi dan kematian besar-besaran dinosaurus  $\pm 65$  juta tahun yang lalu juga disimulasikan tanpa diketahui modelnya dengan pasti. Metode Monte Carlo dapat memecahkan persamaan diferensial parsial yang kompleks sehingga aplikasinya meluas dari transport neutron sampai sistem diagnostik medis.

### **C. Masalah, Solusi Masalah Langsung dan Masalah Invers**

Masalah (*problem*) adalah selisih antara kondisi masa depan yang lebih memuaskan dibandingkan dengan kondisi saat ini yang kurang memuaskan. Sedangkan solusi masalah adalah metode, strategi atau cara yang dipilih dan ditempuh untuk maju dari kondisi kurang memuaskan menuju kondisi lebih memuaskan. Akan tetapi perasaan puas ini biasanya hanya bersifat sementara kemudian dilanjutkan ke tingkat masalah yang lebih tinggi. Inilah ciri masyarakat dinamik yang selalu berubah ke arah kemajuan: "Hari ini lebih baik dari kemarin, dan besok harus lebih baik dari hari ini" (*today is better than yesterday, tomorrow should be better than today*). Adapun masyarakat statik adalah mereka yang sulit berubah, tidak mau maju dan selalu mempertahankan tradisi, adat dan budaya, ibarat katak dalam

tempurung. Apabila kita menghadapi masalah ketika mempelajari sistem alam ciptaan Allah SWT, maka kita berusaha mencari solusi dari masalah tersebut yaitu dengan mengamati, menyelidiki dan melakukan pengukuran sistem alam. Ini sebagai usaha untuk maju dari kondisi tidak paham menjadi lebih paham tentang sifat, dinamika atau identifikasi sistem alam. Usaha ini diawali pemahaman secara kualitatif kemudian dilanjutkan secara kuantitatif.

Seluruh informasi kualitatif maupun kuantitatif tentang sifat sistem alam kemudian terhimpun menjadi ilmu pengetahuan. Ilmu pengetahuan berarti memahami suatu pengetahuan. Kata ilmu sendiri berasal dari bahasa Arab "*ilm*" yang berarti memahami, mengerti, atau mengetahui. Berbeda dengan pengetahuan, ilmu merupakan pengetahuan khusus di mana seseorang mengetahui apa penyebab sesuatu dan mengapa. Ada persyaratan ilmiah sesuatu dapat disebut sebagai ilmu yaitu objektif, metedis, sistematis dan universal. Peran ilmu adalah sebagai modal untuk merancang dan membuat sistem teknologi dengan sifat atau dinamika sesuai selera manusia, misalnya: mobil, pesawat terbang, kapal laut, generator listrik, komputer, HP, dll.



Gambar 1.9 – Grafik definisi masalah

Pengalaman mengajarkan bahwa kita selalu menghadapi berbagai masalah hidup sehingga kita selalu dituntut untuk mencari solusi. Di era modern ini paling sedikit ada empat kelompok masalah yang selalu kita hadapi tanpa henti selama hidup yaitu:

1. Masalah yang selalu kita hadapi sebagai makhluk biologis dan makhluk pribadi dimana manusia perlu makan, minum, bernafas, tidur, BAK, BAB, dll.. Apapun bangsa dan agama kita, masalah ini selalu akan dihadapi dan ini sesuai kehendak Allah. Masalah jenis ini telah dihadapi umat sejak era Nabi Adam, dan akan terus dihadapi sampai kiamat. Dalam hal

ini umat hanya dapat tunduk buta kepada Allah, dan masalah yang sama juga dialami oleh binatang. Di era modern, dengan bertambahnya populasi, masalah ini menjadi makin sulit karena lahan resapan air, perumahan, pertanian dan persediaan air bersih makin menyusut. Hutan yang makin sempit juga membuat binatang makin menderita.

2. Masalah yang selalu kita hadapi sebagai makhluk cerdas, sosialis, dan khalifah/penguasa di bumi yaitu hidup dalam masyarakat dinamik, misalnya membangun jembatan, jalan raya, pesawat, kapal, mobil, negara, organisasi, dll. Jelas kita perlu sains, teknologi dan manajemen untuk masalah ini. Semua ini terjadi karena adanya interaksi positif antara manusia dengan alam sekitar dan manusia dengan manusia. Masalah jenis ini mulai maju sejak era Newton ±500 tahun yang lalu, dan maju pesat sejak 1960-an. Inipun sesuai kehendak Allah SWT dan sesuai sifat manusia yang ditakdirkan cerdas. Sedangkan manusia statik yang mempertahankan tradisi atau seperti katak dalam tempurung akan gagal memikul tugas khalifah dan tidak sesuai dengan kehendak Allah (QS. 8:22, 10:100).
3. Masalah yang tidak kita kehendaki tetapi kita derita karena cobaan dan ujian dari Allah SWT seperti: gempa bumi, gunung meletus, tsunami, angin puyuh, sambaran petir, penyakit, dan lain-lain, sesuai firman Allah: "...Kami beri cobaan kepadamu dengan sedikit ketakutan dan kelaparan, dengan kehilangan harta, jiwa dan tanaman ... (QS. 2:155)". Karena itu perlu ilmu pengetahuan dan teknologi agar penderitaan dikurangi. Salah satu peran pemodelan dan komputasi adalah memungkinkan kita untuk belajar dari masa lalu untuk meramal masa depan, tanpa ada maksud untuk mendahului kehendak Allah, justru sesuai: "Orang pandai melihat ada bahaya akan menyelamatkan diri; tetapi orang bodoh berjalan terus sehingga celaka (Ams 22:3). Juga sesuai: "Peliharalah dirimu dari siksaan yang tidak khusus menimpa orang zalim saja di antara kamu. Ketahuilah bahwa Allah amat keras siksaan-Nya". (QS. 8:25). dan sesuai "... agar orang-orang berakal mengambil pelajaran". (QS. 14:52). dan sesuai: "Allah tidak mengubah keadaan suatu kaum sehingga mereka mengubah keadaan mereka sendiri". (QS. 13:11).
4. Masalah yang tidak kita kehendaki dan kita derita karena kita bodoh, atau pandai tetapi bertindak bodoh seperti rakus, tidak peduli orang lain, dan lain-lain., sesuai: "Apapun musibah yang menimpa kamu adalah akibat perbuatanmu sendiri ...". (QS. 42:30). Juga: "Jangan merusak bumi dan jangan melampaui batas" (QS. 17:41) yang masing-masing diulang kurang lebih 50 kali di Al Quran, tetapi makin sering diulang makin diabaikan sehingga mengakibatkan hutan gundul, banjir, tanah longsor, kemiskinan, rumah sakit dan penjara berjubel, *global warming*,

*greenhouse effect*, dan lain-lain. Masalah nomor 4 di sini dapat dibedakan dalam dua jenis, yaitu:

- a. Interaksi negatif antara dinamika manusia dengan dinamika alam sehingga mengakibatkan hutan gundul, banjir, tanah longsor, polusi tanah, udara atau air, pemanasan global, wabah flu-burung, flu-babi, AIDS, SARS, DBD, dll., yang dialami umat sejak era globalisasi.
- b. Interaksi negatif antara dinamika manusia dengan manusia lain sebagai akibat dari sikap rakus, fanatisisme, dll., yang tampak dari korupsi, jurang kaya-miskin makin lebar, konflik antar kaum, antar bangsa atau antar agama, dengan segala akibatnya.

Peringatan Allah seharusnya menyadarkan kita sebelum bahaya tiba, tetapi kita tidak pernah sadar. Pengalaman bangsa maju membuktikan bahwa pemodelan, komputasi, simulasi ditambah dengan jihad dan sabar dapat membantu mencari solusi mayoritas masalah di atas. Seperti firman Allah: “Jangan melampaui batas”, komputasi dapat membantu menjawab: “Apa saja yang batasnya tak-boleh dilampaui? Apa akibatnya jika batas kita lampau? Berapa, di mana, kapan batas yang tak-boleh dilampaui? Apa ada batas bawah atau batas atas yang tak-boleh dilampaui? Dan sebagainya”.

Dari sudut pandang sistem, semua masalah yang kita hadapi termasuk salah satu di antara 3 masalah berikut. Untuk mengerti sistem, sifat-sifat sistem mesti dipahami secara kualitatif (apa, mengapa, bagaimana) dan kuantitatif (berapa, kapan, di mana).

### C.1. Masalah Analisis (Masalah Langsung/ Masalah Maju)



Tahap ini diawali dengan menganggap sistem sebagai kotak hitam alias pandangan holistik, dan untuk sementara kita tidak peduli dengan unsur atau komponen sistem. Di sini tugas kita ialah mengetahui apa hasil keluaran  $u$  dari sistem jika kepadanya diberi masukan  $x$ , yaitu pengamatan dan pengukuran. Jika dapat dibuat daftar yang berisi kaitan kuantitatif antara masukan  $x$  dengan keluaran  $u$  maka dapat diperkirakan secara empirik model matematik dari sistem. Proses ini disebut eksperimen yang biasanya dilakukan pada model fisik di laboratorium. Di bidang seperti geofisika, astronomi, dan sebagainya, eksperimen di laboratorium tidak mungkin dapat dilakukan maka terpaksa dilakukan pengamatan dan pengukuran langsung di alam, dan data yang dikumpulkan dari alam diperoleh sebagai fungsi waktu  $t$ , yaitu berupa deret waktu .

Kembali ke eksperimen di laboratorium, tahap berikutnya ialah sistem tidak lagi dianggap sebagai kotak-hitam, tetapi diteliti apa saja unsur,

komponen atau subsistem yang secara keseluruhan membentuk sistem, alias membongkar struktur internal sistem berdasar asas reduksionisme. Inilah tahap “analisis sistem”, sesuai gagasan Zienkiewicz-Taylor. Usaha ini juga populer disebut “*divide & impera*”, karena dengan memecah-belah sistem yang kita pelajari, sistem kita kuasai, alias mengerti sifat dan dinamika sistem secara utuh dengan cara mengerti sifat dan dinamika tiap subsistemnya. Ketika menerima asas reduksionisme, kita berasumsi bahwa dinamika sistem adalah linear dan memenuhi asas superposisi: jika  $u$ ,  $v$  solusi masalah maka persamaan  $\alpha u + \beta v$  juga solusi untuk setiap nilai skalar  $\alpha$ ,  $\beta$ . Di abad-20 muncul bidang baru yang disebut dinamika tak-linear di mana reduksionisme gagal untuk mencapai holisme.

### C.2. Masalah Sintesis / Pemodelan / Desain (masalah Invers # 1)



Setelah mengerti berbagai subsistem dari sistem dan peran masing-masing, maka kita perlu mengerti bagaimana berbagai subsistem ini saling berinteraksi dan bekerjasama secara sinergistik agar sistem secara keseluruhan memiliki sifat dan dinamika seperti yang diamati di tahap C.1. Di sini diteliti saling keterkaitan antara satu subsistem dengan subsistem lain untuk menjelaskan secara ilmiah sifat dan dinamika sistem secara keseluruhan – yaitu kaitan antara masukan dan keluaran – seperti yang diamati di tahap analisis. Inilah yang disebut dengan sintesis sistem. Kita juga ingin tahu model matematik sistem secara ilmiah, yaitu masalah pemodelan, yang nanti dibahas lebih lanjut di bawah. Model matematik adalah kaitan kuantitatif antara masukan atau sebab dengan keluaran atau akibat dari sistem yang diteliti.

### C.3. Masalah Kendali / Instrumentasi (masalah Invers # 2)

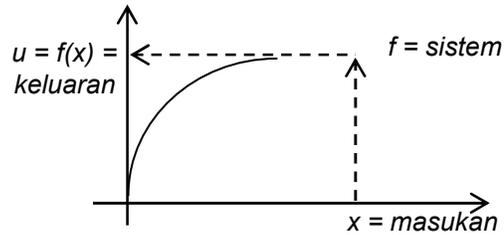


Di tahap ini, kita sudah memahami struktur internal sistem yang kita pelajari, termasuk saling keterkaitan di antara mereka, dan kita juga tahu keluaran apa yang dapat diharapkan jika kepada sistem diberi suatu masukan tertentu. Karena itu penelitian tahap ini dipusatkan pada masalah yaitu masukan apa yang harus diberikan kepada sistem agar sistem menghasilkan keluaran seperti yang kita kehendaki. Penelitian jenis ini termasuk masalah Invers yang disebut masalah pengendalian sistem, yang di era modern ini banyak memanfaatkan instrumentasi digital elektronik.

Cara lain memahami masalah Invers adalah sebagai berikut. Bertolak dari data-meleset atau data yang kurang akurat atau data kurang (*underdetermined*) atau data tidak cukup (*insufficient*) atau data lebih (*overdetermined*) tetapi saling bertentangan (*inconsistent*), kita mesti mengolah data ini agar dapat ditarik sebanyak mungkin kesimpulan yang secara ilmiah benar. Karena tingkat kesulitan yang tinggi maka solusi masalah Invers hanya solusi pendekatan, dan hanya dapat diperoleh dengan bantuan ilmu komputasi dan komputer. Untuk mencari solusi masalah Invers, kita terpaksa menerima informasi awal (*a priori information*) yang bisa benar atau salah. Jika untuk masalah yang sama di lain waktu ditemukan informasi baru maka dilakukan koreksi.

Beberapa contoh masalah Invers dalam kehidupan sehari-hari misalnya adalah pengobatan pasien oleh dokter. Dalam menentukan penyebab penyakit, maka dokter melakukan diagnosis yaitu mendengar keluhan pasien, menghimpun data-data penunjang dan kemudian menduga sebabnya. Sebagai data awal, maka dokter memeriksa tensi darah, suhu badan, denyut jantung, dan seterusnya, agar dokter mengetahui adanya respons atau keluaran yang tidak normal. Selain itu dokter juga menggunakan hasil pemeriksaan laboratorium misalnya *CT-Scan* untuk mengetahui kondisi otak tanpa harus membedah kepala terlebih dahulu. Dari data yang dihimpun maka dokter dapat memperkirakan penyakit yang diderita pasien dan memberikan terapi penyembuhannya. Contoh lain adalah temuan mayat seorang tidak dikenal di daerah terisolasi oleh polisi. Polisi harus mengungkap siapa pelakunya dan apa motif dari perbuatannya tersebut. Demikian juga ketika hotel atau pusat perbelanjaan menerima SMS ancaman teror bom, maka polisi diminta untuk mengamankan dan menangkap pelakunya, atau manajer perusahaan yang mengumumkan 10 lowongan kerja dan menerima ratusan pelamar sehingga harus dipilih pelamar yang tepat.

Contoh umum sering terjadi adalah seorang jejak punya banyak kawan gadis tetapi harus memilih calon isteri yang tepat, juga seorang gadis punya banyak kawan pria dan harus memilih calon suami yang tepat. Semua ini adalah contoh masalah Invers yang sulit karena kurangnya data yang perlu untuk diambil kesimpulan dan keputusan yang benar. Solusi masalah Invers sering kali salah, misalnya dokter salah diagnosis, polisi salah tangkap, suami dan isteri salah pilih akhirnya cerai, dan lain-lain. Polisi yang menemukan mayat, jika kemudian sukses menangkap pelakunya, maka kemudian polisi minta pelaku untuk melakukan rekonstruksi untuk membongkar rahasia pembunuhan. Disini rekonstruksi kualitatif sama dengan solusi masalah Invers kualitatif, dan ini mirip bahwa rekonstruksi kuantitatif sama dengan solusi masalah Invers kuantitatif.



Gambar 1.8 – Grafik fungsi  $u = f(x)$  dari sudut pandang sistem

Untuk matematika, jika fungsi  $u = f(x)$  (lihat gambar) dilihat dari sudut pandang sistem, berarti: peubah bebas  $x$  adalah *masukan*, peubah tak-bebas  $u$  adalah *keluaran*, dan fungsi  $f$  adalah sistem yang mengubah masukan  $x$  menjadi keluaran  $u$ . Jika sistem  $f$  dan masukan  $x$  diketahui, kita dapat menghitung keluaran  $u$  maka ini disebut “masalah maju”. Tetapi jika kita ingin tahu  $f$  jika  $u$  dan  $x$  diketahui, atau ingin tahu  $x$  jika  $u$  &  $f$  diketahui maka hal ini menjadi “masalah Invers”. Untuk solusi masalah Invers di mana  $f$  tak-diketahui dan mesti kita cari, biasanya kita berasumsi bahwa  $u = f(x)$  berbentuk misalnya, linear maka digambarkan dengan persamaan:  $u = a + bx$ , atau kuadratik:  $u = a + bx + cx^2$ , dan masalah Invers di sini ialah menentukan parameter  $a$ ,  $b$  atau  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dengan pemodelan data. Asumsi bentuk fungsi linear, kuadratik dll. dalam teori Invers disebut “informasi awal” (*a priori information*), yang terpaksa dipilih karena info lain tidak diketahui, dan tanpa info awal masalah Invers tidak ada solusinya. Tampak bahwa semua topik di tulisan ini yang mencari solusi berbentuk fungsi seperti interpolasi, pemodelan data, persamaan diferensial, adalah masalah Invers / sintesis / pemodelan sehingga komputasi mutlak perlu. Sedangkan optimisasi berarti sistem  $f$  diketahui, keluaran  $u = f(x)$  mencapai harga maksimum atau minimum diketahui, dan “masalah kendali Invers” adalah harus menentukan nilai  $x = ?$

Masalah maju dan Invers di atas juga dialami di tahap pengembangan, meski dengan urutan beda. Jika kita merancang suatu produk, misalnya alat pendingin atau AC, pertama-tama kita harus bermodal pengetahuan tentang sifat masalah analisis, sintesis, dan pengendalian untuk sistem alam yang terkait dengan rancangannya. Dalam masalah AC, modal informasi yang perlu antara lain teori termodinamika, konduksi panas, dan sebagainya. Tahap berikutnya ialah merancang produk (sistem teknologi) dengan spesifikasi atau kinerja seperti diinginkan (keluaran) jika kepadanya diberi masukan tertentu, dalam hal ini energi listrik. Inilah tahap merancang produk yang termasuk masalah disain / masalah Invers. Misalnya, AC dirancang agar dapat mendinginkan ruang hingga  $20^{\circ}\text{C}$ . Setelah prototip AC jadi, dia diuji-coba secara eksperimen yang merupakan masalah analisis atau masalah maju untuk tahu apakah performa produk sesuai harapan. Jika diinginkan agar AC dapat mempertahankan suhu ruang konstan pada  $20^{\circ}\text{C}$ ,

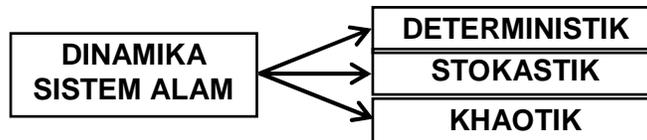
berapapun suhu di luar, berarti perlu subsistem pengendali (termostat, *relay*, dsb.). Inilah masalah kendali atau masalah Invers. Dari contoh ini menjadi jelas mengapa untuk sistem teknologi, masalah #2 disebut juga sebagai sintesis / disain sistem, karena di sini kita merancang suatu produk, dengan maksud memperoleh sistem teknologi / produk yang dapat memberi hasil keluaran / kinerja / respons sesuai selera kita. Allah SWT juga mencipta tubuh kita dengan kendali sempurna sehingga suhu tubuh kita konstan yaitu 37°C di manapun kita berada.

Untuk sistem teknologi, masalah kendali juga disebut masalah instrumentasi, karena pengendalian pesawat terbang, kapal laut, mobil, komputer, dan sebagainya selalu melibatkan instrumentasi elektromekanik atau elektronik digital. Teori kendali (*control theory*) adalah suatu cabang ilmu yang mempelajari topik ini secara kuantitatif. Dalam industri mobil, uji merusak pada prototip mobil (sistem) dengan melarikan mobil 60 km/jam (masuk) dan dibiarkan menumbuk dinding hingga rusak, kemudian tingkat kerusakan (keluaran) diteliti, maka ini termasuk masalah maju. Cara mahal ini, kini diganti dengan uji tidak merusak dengan simulasi komputer yang murah dan aman, maka ini masalah Invers.

Dari tulisan ini akan tampak bahwa pemodelan, komputasi dan simulasi adalah alat bantu untuk solusi pemecahan masalah (*problem solving*) dalam pengambilan keputusan (*decision making*) bagi pemerintah dan sektor swasta di era modern, terutama dengan membantu mencari solusi masalah Invers yang banyak kita hadapi. Pengalaman negara maju telah membuktikan hal ini. Solusi masalah dan pengambilan keputusan adalah pasangan tak-terpisahkan, karena kita biasa menghadapi beberapa pilihan solusi yang layak (*feasible solutions*) untuk suatu masalah, dan kita mesti mengambil keputusan dengan memilih salah satu solusi layak yang dianggap paling baik. Biasanya lewat optimisasi yaitu salah satu bentuk penyelesaian masalah Invers yang rumit.

#### C.4. Dinamika Sistem Alam

Untuk mengerti sistem alam ciptaan Allah, para ilmuwan sejak era Newton sampai kini menemukan tiga jenis sistem dengan dinamika yang berbeda yaitu sistem deterministik, sistem stokastik dan sistem khaotik (seperti diperlihatkan pada bagan dalam gambar 1.9).



Gambar 1.9 – Pembagian dinamika sistem

#### C.4.1. Sistem Deterministik

Sistem deterministik ialah sistem yang perilaku dan dinamikanya di masa depan pasti dan dapat diramal secara rinci dengan tepat, asal kondisi awal diketahui. Dari sudut pandang sistem, kondisi awal adalah masukan/sebab dan dinamika sistem di masa depan adalah keluaran/akibat. Sistem deterministik bersifat: “Dua masukan yang sama menghasilkan dua keluaran sama”, dan “Dua masukan yang sedikit beda menghasilkan dua keluaran yang sedikit beda”. Sistem deterministik yang kita kenal ialah alam semesta dan sistem tatasurya kita dengan dinamika teratur adalah sesuai sabdah Illahi.

Pada tahun 1922, Alexander Friedmann, seorang kosmologis dan matematikawan Rusia, menurunkan persamaan Friedmann dari persamaan relativitas umum Albert Einstein. Persamaan ini menunjukkan bahwa alam semesta mungkin mengembang dan berlawanan dengan model alam semesta yang statis seperti yang diadvokasikan oleh Einstein pada saat itu. Pada tahun 1929 astronom Amerika Serikat, Edwin Hubble melakukan observasi dan melihat galaksi yang jauh dan bergerak selalu menjauhi kita dengan kecepatan yang tinggi. Ia juga melihat jarak antara galaksi-galaksi bertambah setiap saat. Penemuan Hubble ini menunjukkan bahwa alam semesta kita tidaklah statis seperti yang dipercaya sejak lama, namun bergerak mengembang. Kemudian ini menimbulkan suatu perkiraan bahwa alam semesta bermula dari pengembangan di masa lampau yang dinamakan Ledakan Besar (*Big Bang*) sebagai proses pengembangan ruang-waktu.

Teori *Big Bang* sesuai sabda Illahi: “...bahwasanya langit dan bumi itu keduanya dahulu adalah suatu yang padu, kemudian Kami pisahkan antara keduanya...” (QS. Al Anbiyaa’ 13:2) serta “Dan langit itu Kami bangun dengan kekuasaan (Kami) dan sesungguhnya Kami benar-benar meluaskannya.” (QS. Adz Dzaariyaat 51:47). Berkat ilmu pengetahuan modern yang memungkinkan pengamatan radiasi latar alam semesta dan benda-benda langit, para ilmuwan memperoleh pemahaman bahwa alam semesta tidaklah statis tetapi dinamis, memiliki suatu permulaan (teori *Big Bang*) dan kemudian mengalami perluasan atau pengembangan (*expanding universe*). Kemudian: “..dan memerintahkan matahari dan bulan. Masing-masing beredar hingga waktu yang ditentukan.” (QS. Ar Ra’d 13:2). “Matahari dan bulan (beredar) menurut perhitungan.” (QS. Ar Rahman 55:5). Dinamika alam ini dipahami para astronom lewat MM/PP yaitu hukum Newton sebagai fungsi waktu.

Contoh sistem deterministik lain adalah pada peluruhan suatu zat radioaktif di alam yaitu secara makro mengikuti model:  $dN/dt = -\lambda N$  atau  $N_t = N_0 e^{-\lambda t}$  berapa atom  $N_t$  yang tersisa setelah selang waktu  $t$  dapat diramal dengan pasti, asal jumlah atom  $N_0$  di saat  $t = 0$  dan parameter  $\lambda$  diketahui. Teori pertanggalan karbon (*carbon dating*) berdasarkan aktivitas peluruhan

karbon (C-14) yang memiliki waktu paruh 5730 tahun ( $\lambda = 12,09 \times 10^{-5}$  /tahun), maka benda kuno berupa tulang-belulang, kayu sisa bangunan, tanaman, binatang dan alat-alat dari kayu yang dipakai manusia dapat ditentukan umurnya.

#### **C.4.2. Sistem Stokastik**

Sistem stokastik atau sistem acak ialah sistem yang dinamikanya di masa depan secara mikro berubah sehingga tidak dapat diramal, tetapi secara makro dapat diramal menurut suatu distribusi kebolehjadian tertentu. Dari sudut pandang sistem, sistem stokastik bersifat: “dua masukan yang sama menghasilkan dua keluaran beda”. Suatu contoh sistem stokastik adalah pola peluruhan radioaktif yang bersifat acak atau tidak teramalkan secara mikro yaitu di dalam setiap atom atau isotop. Banyaknya bagian yang meluruh tergantung pada konstanta peluruhan  $\lambda$ . Arti fisik parameter  $\lambda$  ialah kebolehjadian sebuah inti radioaktif meluruh per satuan waktu. Fakta ini menunjukkan bahwa tidak mungkin meramal atom mana yang akan meluruh di suatu saat  $t$ . Jadi peluruhan zat radioaktif secara mikro termasuk dinamika stokastik dengan urutan kejadian dan kemunculannya berdasarkan kebolehjadian tertentu. Model stokastik sebagai bagian dari teori peluang berbeda dengan model persamaan yang bersifat deterministik. Peramalan menggunakan metode stokastik tidak akan menghasilkan nilai yang bersifat eksak tetapi terdistribusi secara acak dalam sebuah interval dengan tingkat kepercayaan tertentu.

Banyak kejadian di alam lebih bersifat stokastik dari pada deterministik, misalnya: angka pertumbuhan penduduk tahun 2010, inflasi tahun berjalan, fluktuasi nilai rupiah terhadap dolar dalam seminggu, korban kecelakaan lalu lintas dalam satu tahun, gerakan neutron di teras reaktor, dll. Kejadian-kejadian tersebut tentu saja bisa dimodelkan secara deterministik, misalnya angka pertumbuhan dikaitkan dengan jumlah kelahiran dan kematian sebagai fungsi dari kesuburan dan penyakit mematikan yang mungkin dapat terjadi, akan tetapi persamaan menjadi kompleks karena membutuhkan banyak peubah untuk mendapatkan gambaran nyata dari kejadian sesungguhnya. Tentu saja dapat dilakukan kompromi dengan melakukan penyederhanaan sistem. Sedangkan penyelesaian sistem stokastik tidak memerlukan adanya MM/PP tetapi perilaku dinamik sistem dapat langsung disimulasi dengan metode Monte Carlo menggunakan algoritma Metropolis. Walaupun demikian pemodelan secara deterministik maupun secara stokastik, keduanya sangat dibutuhkan dalam menggambarkan perilaku dinamik sistem di alam. Kedua pendekatan saling melengkapi, kekuatan deterministik adalah pada penggambaran sebuah sistem secara makro dan kekuatan stokastik adalah pada penggambaran sistem secara mikro dengan memperlakukan individu secara unik.

### **C.4.3. Sistem Khaotik**

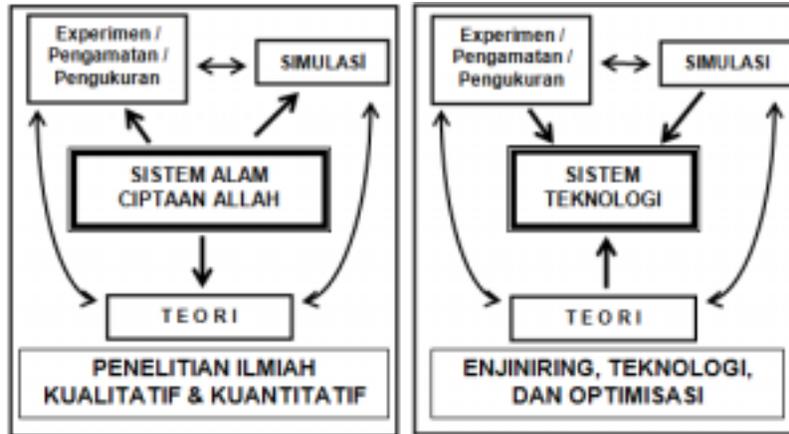
Sistem khaotik yang baru dikenal di tahun 1970-an adalah sistem dengan MM/PP tak-linear dan memiliki satu atau lebih parameter. Sampai batas masukan dan nilai parameter tertentu, dinamika sistem bersifat deterministik. Akan tetapi dinamika sistem menjadi khaotik atau kacau jika batas ini dilampaui. Dari sudut pandang sistem, sistem khaotik bersifat: “dua masukan sama menghasilkan dua keluaran sama, tetapi dua masukan beda sedikit dapat menghasilkan dua keluaran beda jauh sehingga sistem khaotik disebut *deterministic randomness / butterfly effect* atau karena nilai setitik, rusak susu sebelanga. Sistem khaotik adalah perilaku sistem dinamis yang sangat sensitif terhadap syarat-syarat awal. Perilaku khaotik ini dapat diamati dari sejumlah sistem alam misalnya cuaca, tsunami, pasar saham, kendali reaktor nuklir dan sifat elastisitas pegas.

## **D. Eksperimen, Simulasi, dan Teori**

Di atas telah disinggung tentang usaha mengerti sifat atau dinamika sistem alam dan sistem teknologi lewat eksperimen dan simulasi. Berikut adalah bahasan lebih rinci.

### **D.1. Eksperimen / Pengamatan / Pengukuran**

Eksperimen/pengamatan/pengukuran dilakukan pada sistem asli atau model fisik di alam, di laboratorium atau di rumah-kaca. Pada pengamatan dan pengukuran di laboratorium atau di rumah-kaca, kondisi lingkungan (suhu, humiditi, dan sebagainya.) dapat dikendalikan. Pengamatan berarti mengerti dinamika sistem secara kualitatif, dan pengukuran berarti mengerti dinamika secara kuantitatif. Eksperimen di laboratorium atau di rumah-kaca dilakukan dengan memberi sistem berbagai masukan, perlakuan, stimulus atau sebab kemudian kita amati dan ukur hasil keluaran, respons, reaksi atau akibat dari sistem. Dari pengukuran eksperimen, yaitu dari hasil regresi atau pemodelan data, dapat disimpulkan tentang adanya kaitan kuantitatif antara masukan dengan keluaran, alias model matematika / persamaan pemerintah (MM/PP).



Gambar 1.10 – Bagan hubungan Teori, Eksperimen dan Simulasi dengan Sistem Alam dan Sistem Teknologi

Eksperimen perlu untuk membuktikan kebenaran hipotesis yang dibuat di teori. Dengan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi yang menuntut sarana makin canggih, biaya eksperimen makin mahal sehingga sulit bagi negara berkembang melakukannya. Eksperimen juga menjadi mahal jika dilakukan dengan coba-coba (*trial & error*). Karena itu eksperimen modern selalu diawali dengan rancangan eksperimen yang baik, termasuk pengumpulan sebanyak mungkin informasi ilmiah dari jurnal, dari teori dan dengan pemodelan dan simulasi yang relatif murah. Eksperimen coba-coba mesti dihindari dan eksperimen sekali jadi dan mesti sukses demi efisiensi biaya dan waktu. Meski demikian, eksperimen adalah tahap penting dan tidak mungkin dihindari, karena konsumen tidak peduli terhadap teori dan simulasi. Yang penting mutu produk baik dan harga terjangkau sehingga produk dapat diterima konsumen dan menguntungkan produsen atau *win-win solution*.

Selain eksperimen terkendali di laboratorium, juga ada pengamatan dan pengukuran tak-terkendali di alam, yang terpaksa dilakukan karena tidak mungkin dilakukan di laboratorium, misalnya riset di bidang astronomi, geologi, meteorologi, ekonomi, dan lain-lain. Pengamatan dan pengukuran juga dapat dilakukan pada sistem teknologi seperti kapal angkasa. Data yang terkumpul biasanya dalam bentuk deret waktu, yaitu mengukur satu atau beberapa besaran tertentu sebagai fungsi waktu  $t$ , alias mengerti dinamika sistem alam. Usaha Gauss untuk mengerti dinamika bintang di langit, usaha geologiwan untuk menebak adanya magma di pusat bumi tanpa melihat, penemuan astronom Hubble bahwa alam semesta mengembang yaitu teori big bang, dan sebagainya, adalah termasuk pengamatan dan pengukuran tak-terkendali. Data mentah dari pengamatan dan pengukuran dari alam ini dianalisis dengan pengolahan data kemudian ditarik sebanyak mungkin

kesimpulan / informasi yang secara ilmiah dapat dibenarkan lalu publikasi di jurnal ilmiah. Disinilah letak beda antara data mentah (*raw data*) dibandingkan dengan informasi yang penuh makna tentang sifat, identifikasi dan dinamika sistem alam yang diteliti.

Ini sesuai kata-kata bijak Henri Poincaré sekitar seabad yang lalu: “Ilmu pengetahuan disusun dari setumpuk data seperti rumah disusun dari setumpuk batu. Tetapi setumpuk batu belum tentu rumah, dan setumpuk data belum tentu ilmu pengetahuan”. Tulisan ini dimaksud membantu para peneliti mengolah data mentah tanpa makna menjadi informasi penuh makna ilmiah sehingga menjadi solusi masalah Invers. Tampak bahwa data mentah yang bagi orang awam sama sekali tak-berarti, tetapi bagi ilmuwan berarti penting. Analoginya, data mentah dari bumi dan alam semesta atau yang tersurat di kitab-kitab suci bagi orang awam adalah data mentah dari Allah SWT yang mudah. Kelompok ini oleh Allah disebut: “Hati, mata dan telinga mereka ditutup”, “dada sempit”, “tukar ayat-ayat Allah dengan harga murah”, “tidak beriman”, “meremehkan Al Quran” (QS. 2:6-7, 2:41, 6:125, 7:2, 13:1, 56:81). Jadi tugas umat yang sukses beriman ialah menafsirkan apa pesan atau informasi yang tersirat di balik alam raya atau di balik ayat yang tersurat, sehingga alam dan kitab-kitab suci benar-benar bermakna tinggi dan luas guna mengeluarkan kita dari gelap menuju terang, sesuai sifat Allah Yang Maha Besar dan Maha Meliputi. Contoh #1 dari data mentah: “Burung-burung dimudahkan terbang oleh Allah” (QS. 16:79, 67:19) tersirat firman agar kita bikin pesawat terbang. Contoh #2 dari data mentah berupa global warming tersirat firman: “Jangan merusak bumi” (QS. 7:85). Contoh #3 dari data mentah Asas Aksi Terkecil, Algoritma Genetik, *Simulated Annealing* tersirat: “Jangan memboroskan kekayaanmu, para pemboros sama dengan kawan syaitan” (QS. 17:26-27).

## **D.2. Simulasi Komputer**

Simulasi Komputer adalah eksperimen yang dilakukan pada MM/PP dengan bantuan komputer. Dengan adanya komputer yang makin canggih sejak 1960-an, berkembang metode komputasi dan simulasi komputer yang efektif dan efisien untuk membantu mencari solusi masalah ilmu pengetahuan dan rekayasa yang sulit. Tampak kaitan antara ketiga jenis riset di Gambar 10, yaitu eksperimen dan simulasi didukung teori yang kuat sebagai fondasi. Untuk riset ilmiah, arus data ilmiah mengalir dari sistem alam yang diteliti ke ilmuwan kemudian diolah menjadi informasi ilmiah atau ILMU PENGETAHUAN. Pada pengembangan teknologi, seluruh informasi ilmiah yang diketahui para ilmuwan dan perancang dicurahkan untuk merancang sistem teknologi (produk), dilanjutkan ke pembuatan prototip (model fisik) kemudian dilakukan uji-coba. Setelah semua beres maka dilakukan produksi kemudian pemasaran.

Jika MM/PP suatu sistem perlu dicari solusi komputasinya dengan komputer, maka model ini dengan bantuan algoritma yang dibahas di tulisan ini harus lebih dulu diubah menjadi program komputer, alias model komputer. Aplikasi terpenting dari simulasi komputer ialah untuk meramal dan optimisasi dalam dimensi ruang dan waktu dalam ilmu pengetahuan, teknologi, dan manajemen modern, misalnya untuk menentukan:

- Berapa massa kritis sebuah reaktor nuklir dengan konfigurasi / bahan bakar / daya tertentu, tanpa perlu melakukan eksperimen yang mahal dan berbahaya,
- Berapa tebal optimal perisai reaktor dengan daya tertentu, atau berapa tebal optimal tiang penahan jembatan dengan beban tertentu, tanpa eksperimen yang mahal,
- Kapan susunan elemen bakar reaktor nuklir secara periodik harus diubah untuk meng-optimalkan pemanfaatan elemen bakar,
- Kapan, berapa cepat dan ke arah mana roket mesti diluncurkan dari Cape Kennedy di USA untuk melepas satelit Palapa agar ia berada di posisi tetap di atas Indonesia,
- Kapan terjadi gerhana matahari atau bulan, dan bagian mana di bumi yang akan gelap,
- Berapa kuat motor dan bagaimana struktur badan pesawat terbang yang dirancang untuk dapat terbang dengan kecepatan tertentu dan dengan daya angkut tertentu,
- Bagaimana meramal perubahan cuaca dan mengantisipasi angin-puyuh,
- Berapa tebal optimal kerangka mobil agar jika dikendarai pada kecepatan 60 km/jam kemudian menumbuk dinding tebal, pengemudi selamat yang dilakukan dengan uji tak-merusak, aman dan murah,
- Berapa daya dukung populasi tiap pulau di Indonesia agar lingkungan tidak rusak,
- Kapan terjadi dentuman dahsyat / *Big Bang* milyaran tahun yang lalu,
- Bagaimana dapat timbul medan magnet di bumi,
- Semua ini adalah masalah Invers sulit yang tak-mungkin dijawab secara analitik.

Impian para ilmuwan negara maju antara lain ialah melakukan simulasi komputer untuk meramal: (a) kondisi cuaca dengan lebih tepat, (b) di mana dan kapan akan terjadi gempa bumi dan berapa skala Richter, (c) Kapan dan di mana akan datang angin taufan atau tsunami, dan (d) Kapan akan terjadi hari kiamat karena ada benda angkasa atau asteroid yang mendekati dan menumbuk bumi. Untuk point d, ada 2 hal yang dapat terjadi: bumi hancur, atau bumi utuh tetapi manusia dan binatang mati semua dan diganti makhluk lain, yaitu punah seperti dinosaurus jutaan tahun yang lalu, sesuai: "Jika Dia kehendaki, pasti Dia musnahkan kamu dan mendatangkan makhluk baru untuk menggantikan kamu". (QS. 35:16).

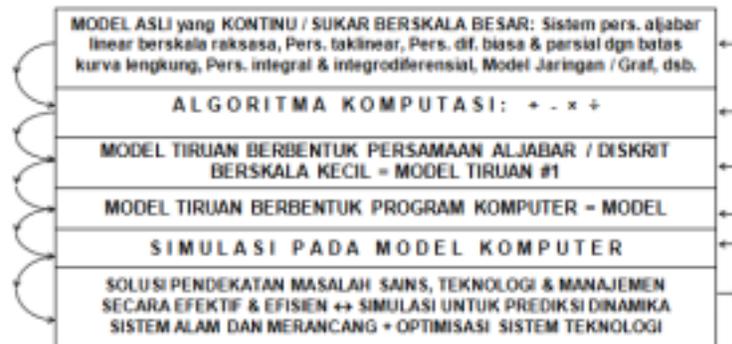
Perlu kita sadari bahwa usaha meramal gempa, taufan, tsunami, hari kiamat, adalah dengan maksud jika bahaya dapat diramal sebelumnya, kita dapat melakukan evakuasi penduduk dari lokasi bahaya ke lokasi aman, agar penderitaan dan korban manusia dapat ditekan. Mengantisipasi bahaya adalah sesuai kehendak Allah dan sama sekali tidak dimaksud untuk melawan atau mendahului ketentuan-Nya. Gempa bumi, taufan, tsunami, dan kiamat yang akan terjadi, pasti terjadi sesuai kehendak Allah. Gempa bumi dan taufan yang menelan banyak korban di Jepang bulan Oktober 2004 adalah bukti nyata bahwa negara industri majupun tak berdaya menghadapi cobaan Allah SWT. Apalagi menghadapi tsunami Aceh pada bulan Desember 2004. Untuk asteroid yang mendekati bumi, para ilmuwan barat berasumsi bahwa mereka dapat mendeteksi datangnya asteroid mendekati bumi, kemudian menembak asteroid dengan peluru kendali ketika asteroid masih di angkasa sehingga kiamat dihindari. Yang jelas, kita mesti ingat:” Allah tidak mengubah keadaan kita jika kita tidak berusaha mengubahnya sendiri”. (QS. 13:11).

### **D.3. Teori**

Teori dalam ilmu pengetahuan bertujuan untuk mencari keterangan ilmiah dan rasional tentang fakta-fakta yang diamati di alam, dari hasil eksperimen, dan dari hasil simulasi komputer. Sebaliknya, teori juga menghasilkan suatu hipotesis yang benar menurut teori, tetapi belum terbukti kebenarannya secara eksperimen. Teori juga bertujuan menemukan MM / PP suatu sistem dan mencari solusi analitiknya, kemudian dibandingkan dengan hasil eksperimen dengan model fisik, dan solusi komputasi dengan model komputer. Jika hasil eksperimen, simulasi, dan teori (dalam batas toleransi) sesuai, maka hal ini diterima sebagai kebenaran ilmiah tentang sifat atau dinamika sistem yang diteliti. Jika ternyata teori tentang suatu sistem menghasilkan MM / PP taklinear, maka solusinya harus menunggu kemajuan komputasi dan komputer paralel. Contoh: Navier & Stokes yang menemukan model taklinear dinamika fluida secara teori di abad-19, ternyata model ini baru dapat dicari solusinya  $\pm 1\frac{1}{2}$  abad kemudian setelah ditemukan algoritma untuk solusi MM / PP taklinear dan komputer paralel yang cepat dengan kapasitas memori besar.

Tampak bahwa eksperimen, simulasi dan teori memiliki kekuatan dan kelemahan masing-masing sehingga ketiganya perlu dilakukan karena saling melengkapi. Fakta lain ialah, sejak  $\pm 1980$ -an ketiga jalur ini sudah ditanamkan kepada para mahasiswa bidang keilmuan, teknologi, ekonomi, keuangan, kedokteran, dan sebagainya di negara maju sehingga ketika lulus S1 / S2 / S3 dan kemudian bekerja di sektor swasta atau pemerintah, mereka tidak lagi canggung menghadapi ketiga jalur eksperimen, simulasi, dan teori di abad-21.

## E. Algoritma, Kesalahan dan Kemantapan dalam Komputasi



Gambar 1.11 – Diagram peran algoritma mencari solusi

### E.1. Algoritma

Algoritma berasal dari nama penulis buku “*Al Jabar Wal-Muqabala*” yang terkenal yaitu Abu Ja’far Muhammad Ibnu Musa Al-Khuwarizmi. “*Al-Khuwarizmi*” dibaca orang barat menjadi “*Algorihm*” dan dalam bahasa Indonesia diterjemahkan menjadi “Algoritma”. Definisi **Algoritma** adalah urutan langkah-langkah penyelesaian masalah yang disusun secara sistematis dan logis. Kata “logis” merupakan kata kunci dalam algoritma. Langkah-langkah dalam algoritma harus logis dan harus dapat ditentukan bernilai salah atau benar. Dalam kehidupan sehari-haripun banyak terdapat proses yang dinyatakan dalam suatu algoritma. Cara-cara membuat kue atau masakan yang dinyatakan dalam suatu resep juga dapat disebut sebagai algoritma, karena pada setiap resep selalu ada urutan langkah-langkah membuat masakan. Bila langkah-langkahnya tidak logis, maka tidak dapat dihasilkan masakan yang diinginkan. Algoritma mengubah persamaan matematik menjadi operasi aritmatik atau perhitungan biasa. Agar dapat dilaksanakan oleh komputer, algoritma harus ditulis dalam notasi bahasa pemrograman sehingga diperoleh program. Jadi program adalah perwujudan atau implementasi teknis dari algoritma yang ditulis dalam bahasa pemrograman tertentu sehingga dapat dilaksanakan oleh komputer.

Jika kita menghadapi MM/PP sukar seperti persamaan aljabar berskala raksasa atau persamaan diferensial, model asli yang sukar ini dicari solusi komputasinya dengan terlebih dulu mengubah model asli menjadi model tiruan yang sepadan dan mudah. Dua model dikatakan sepadan jika keduanya mewakili dinamika sistem yang sama. Dalam komputasi, metode mengubah model sukar menjadi mudah – antara lain lewat proses diskritisasi – disebut algoritma. Hasilnya adalah persamaan aljabar berskala kecil yang berisi sederet operasi mudah, walaupun memberi hasil solusi agak

meleset. Yang dimaksud operasi mudah ialah operasi aritmetik:  $+$   $-$   $\times$   $\div$  . Persamaan diferensial diubah menjadi persamaan aljabar di mana solusi persamaan aljabar mendekati solusi persamaan diferensial. Jika solusi model asli dan sukar berbentuk fungsi kontinu, maka komputasi memberi solusi pendekatan berupa  $N$  nilai/titik diskrit, atau kombinasi linear fungsi basis / polinom. Dalam komputasi, model persamaan aljabar yang mudah ini (model tiruan #1) diubah lagi ke model komputer dibantu bahasa pemrograman: Basic, Fortran, C, Pascal, dsb. menjadi model tiruan #2 yang dapat diterima dan dipahami komputer sehingga dapat dilaksanakan komputer dengan cepat dan otomatis. Komputer memaksa kita melakukan diskritisasi, karena komputer adalah mesin diskrit yang hingga ( $< \infty$ ), bukan mesin kontinu yang tidak terbatas ( $\infty$ ). Diagram pada gambar 1.11 menunjukkan peran algoritma untuk mencari solusi suatu model sukar, sekaligus memberi gambaran tentang inti dari seluruh tulisan ini.

Berikut adalah beberapa aspek positif dan negatif dari strategi komputasi yang harus kita sadari:

- Walaupun operasi aritmetik  $+$   $-$   $\times$   $\div$  mudah, tetapi mesti dilakukan ratusan atau ribuan kali sehingga mutlak perlu bantuan komputer artinya “manusia adalah pembuat peralatan dan peralatan digunakan untuk penciptaan” (*man is a tool-making and tool-using creature*).
- Walaupun pada umumnya bersifat ilmiah, langkah atau tahap awal beberapa algoritma sering mengandung unsur coba-coba atau eksperimen maka komputasi dapat disebut sebagai eksperimen matematika atau eksperimen numerik.
- Walaupun solusi sebenarnya tidak diketahui namun solusi komputasi dapat dicari, meski agak meleset dan adanya solusi agak meleset jauh lebih baik dari pada tidak tahu solusinya sama sekali.
- Dalam teknologi, solusi sebenarnya dan mahal tidak dapat diterima, sehingga solusi komputasi yang murah dan cepat lebih disukai untuk menghasilkan produk teknologi yang murah dan bermutu baik.
- Solusi komputasi juga makin menarik karena harga perangkat keras dan perangkat lunak komputer semakin murah dengan kemampuan semakin canggih.

Dari bahasan di atas tampak adanya tiga jenis model yang harus kita perhatikan ketika mencari solusi masalah lptek lewat metode komputasi, yaitu:

1. MM/PP asli umumnya berbentuk persamaan diferensial biasa (PDB) atau persamaan diferensial parsial (PDP) dengan syarat awal atau syarat batas.
2. MM/PP tiruan didapat dari MM/PP asli dengan bantuan suatu algoritma.
3. Model Komputer ditulis dalam Basic / Fortran / Pascal / C di dalam memori komputer.
4. Model Komputer dapat dilakukan dengan simulasi Monte Carlo.

Jika program selesai dilaksanakan komputer, maka hasil keluaran komputer yang kita dapat adalah solusi model komputer yang agak menyimpang dari solusi model tiruan atau model aljabar, akibat keterbatasan kemampuan komputer. Solusi model tiruan sendiri, andaikan dapat dicari dengan tepat, juga agak menyimpang dari solusi model asli yang benar, sebagai akibat dari keterbatasan algoritma yang kita gunakan. Algoritma komputasi yang baik mempunyai ciri-ciri umum sebagai berikut:

- Setiap langkah harus jelas, tidak meragukan siapapun yang mempelajarinya.
- Banyaknya langkah suatu algoritma harus berhingga, idealnya sesedikit mungkin.
- Idealnya harus mampu menghadapi berbagai masalah patologis dari masalah yang dicari solusinya.
- Harus dapat menghasilkan keluaran dengan kesalahan relatif kecil dan terkendali.

Perlu diingat bahwa suatu algoritma tidak dapat mencari solusi semua masalah komputasi. Di lain pihak, para saintis juga berusaha menerapkan *economy of thought*, yaitu satu algoritma yang dapat membantu solusi sebanyak mungkin masalah. Tentang manfaat algoritma bagi manusia, jurnal komputasi "*Computing in Science & Engineering*" atau CSE yang diterbitkan oleh *Institute of Electronics & Electrical Engineering* dan *American Institute of Physics* edisi Januari 2000, telah memilih 10 algoritma di antara ratusan algoritma lain, yang dinilai paling berguna bagi manusia di abad ke-20. Pemilihan dibantu banyak ilmuwan kelas dunia. Sepuluh algoritma terbaik adalah:

1. Integer Relation Detection
2. The (Dantzig) Simplex Method for Linear Programming
3. Krylov Subspace Iteration
4. The QR Algorithm
5. Sorting with Quicksort
6. The Decompositional Approach to Matrix Computation: Cholesky, LU, QR, Spectral, Schur, Singular Value Decomposition.
7. The Fast Fourier Transform
8. The Metropolis Algorithm
9. The Fortran I Compiler
10. Fast Multipole Algorithm.

## **E.2. Kesalahan Komputasi**

Seperti telah disinggung di atas, ada harga yang harus dibayar jika kita melakukan komputasi dengan komputer, yaitu timbul kesalahan yaitu selisih antara solusi pendekatan dengan solusi sesungguhnya, yang tidak mungkin kita hindari. Kesalahan ini harus kita kendalikan dan kita ralat agar tidak melampaui batas toleransi. Berikut adalah bahasan singkat tentang

kesalahan komputasi dan beberapa sifat-sifatnya. Jika  $x_s$  adalah nilai sebenarnya suatu besaran yang dicari dan tidak akan pernah kita ketahui, dan  $x_p$  adalah nilai pendekatan besaran tersebut, yang kita dapat dari hasil komputasi, maka kesalahan sama dengan nilai sebenarnya dikurangi nilai pendekatan atau:

$$\text{Kesalahan} = x_s - x_p$$

Kesalahan ini disebut kesalahan mutlak (*absolute error*), untuk membedakannya dengan kesalahan relatif (*relative error*), yaitu

$$k = \frac{x_s - x_p}{x_p} \cdot 100\%$$

Di antara ketiga besaran  $x_s$ ,  $x_p$ , dan kesalahan  $k$ , hanya hasil komputasi  $x_p$  yang kita tahu, sedangkan besaran  $x_s$  dan  $k$  tidak kita ketahui. Meski demikian, kita mutlak perlu tahu perkiraan besarnya kesalahan  $k$ , agar seberapa jauh  $x_p$  meleset dari  $x_s$  dapat kita duga. Inilah salah satu masalah Invers di bidang komputasi. Tanpa dugaan ini, berarti kita percaya buta pada hasil keluaran komputer, tanpa ada usaha *check & recheck*. Hal ini tak-boleh terjadi maka kita lihat bahasan lebih lanjut di bawah.

### E.2.1. Kesalahan Pembulatan

Mengingat keterbatasan memori komputer yang tidak mampu menyimpan data yang nilai sebenarnya mengandung banyak angka di belakang titik desimal, maka timbul kesalahan yang dikenal sebagai “kesalahan pembulatan”. Tampak bahwa kesalahan pembulatan timbul ketika kita mengubah model tiruan / aljabar menjadi model komputer. Misalnya, dalam model aljabar, bilangan  $1/3$  mudah diterima, tetapi dalam model komputer,  $1/3$  disimpan sebagai  $0,3333333 \neq 1/3$ , sebab  $(1/3) \times 3 = 1 \neq .9999999 = .3333333 \times 3$ . Begitu pula  $\sqrt{2} \neq 1.41421356$ , sebab jika dikuadratkan keduanya memberi hasil yang berbeda, meskipun bedanya kecil. Jika algoritma menuntut bahwa suatu proses harus diulang-ulang, maka timbul “perambatan kesalahan” (*propagation of errors*) yang harus diwaspadai.

### E.2.2. Kesalahan Diskritisasi

Pada penggunaan metode numerik, solusi masalah nilai awal atau masalah nilai batas, turunan persamaan diferensial didekati dengan proses diskritisasi sehingga timbul kesalahan diskritisasi. Hal ini memang menyedihkan, karena di satu pihak alam yang kita coba pahami bersifat

kontinu, sehingga MM/PP-nya adalah model kontinu seperti PDB/PDP. Di lain pihak kita hanya dapat bekerja secara diskrit dan terhingga, sesuai kemampuan komputer yang kita gunakan, secanggih apapun komputer kita. Ini salah satu bandingan antara kebesaran Allah SWT dan manusia yang kecil, bodoh dan dengan kemampuan amat terbatas.

Deret Taylor adalah perangkat (*tools*) utama untuk menurunkan model aljabar dari model asli. Fungsi kompleks didekati dengan polinom dalam bentuk deret Taylor, hasilnya pun merupakan suatu pendekatan. Rumus yang sering digunakan adalah deret Taylor 1-peubah, yaitu:

$$u(x+h) = u(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u^{(i)}(x)}{i!} h^i,$$

dan jika diandaikan bahwa nilai  $u(x+h)$  didekati oleh tiga suku pertama saja, maka nilai yang diabaikan adalah suku ketiga dan selanjutnya:  $\sum_{i=3}^{\infty} \frac{u^{(i)}(x)}{i!} h^i$  = kesalahan komputasi yang disebut “kesalahan pemangkasan” (*truncation error*). Dari kalkulus kita tahu bahwa :

$$u(x+h) = u(x) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{u^{(i)}(x)}{i!} h^i + O(h^N),$$

di mana  $O(h^N)$  adalah kesalahan pemangkasan yang timbul karena nilai  $u(x+h)$  hanya didekati oleh  $N$  suku pertama dari deret Taylor. Besarnya kesalahan ini ialah:

$$O(h^N) = \frac{u^{(N)}(x+\xi h)}{N!} h^N, \quad 0 \leq \xi \leq 1.$$

Karena  $\xi$  tak-mungkin diketahui, maka kesalahan ini sering didekati dengan:

$$\xi = 0 \rightarrow O(h^N) = \frac{u^{(N)}(x)}{N!} h^N,$$

yaitu suku terbesar dari bagian deret yang diabaikan atau dipangkas. Begitu pula untuk deret Taylor atau deret pendekatan lain.

Sebagai contoh, jika diperlukan nilai fungsi  $u = \sin(x)$  untuk suatu  $x$ , maka matematika memberi solusi berupa deret Taylor yang konvergen untuk setiap nilai  $x$ :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

Dalam praktek, tidak mungkin deret tak terhingga ( $\infty$ ) dijumlah semua sukunya maka nilai  $\sin(x)$  didekati dengan menjumlah beberapa suku saja

dan mengabaikan sisanya. Kita ketahui untuk  $x = 30^\circ$ , nilai  $\sin(30^\circ) \approx 0,5235988$  rad. Misalnya, yang diketahui adalah nilai  $\sin(x) = 0,5$ , kita mendapat hasil:

$$x - \frac{x^3}{3!} \approx 0,4996742, \quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \approx 0,5000021, \quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \approx 0,5$$

yang menunjukkan bahwa dengan menjumlah 1 suku pertama saja, 2 suku pertama saja, dan 3 suku pertama saja., didapat hasil yang makin akurat sehingga kesalahan komputasi semakin kecil. Berikut adalah contoh subprogram atau fungsi untuk menghitung  $\sin(x)$  dengan deret Taylor di atas yang ditulis menggunakan bahasa pemrograman Microsoft Visual Basic.

```
Private Function Sinus(Sudut As Double) As Double
Dim pi, epsilon, suku, jumlah As Double
Dim tanda, n As Integer
Dim error, suku, jumlah As Double
Dim tanda, n As Integer
    epsilon = 0.00000001
    suku = Sudut
    tanda = 1
    n = 1
    jumlah = 0
    faktorial = 1
    Do While Abs(suku) > epsilon
        jumlah = jumlah + suku
        n = n + 2
        faktorial = faktorial * (n - 1) * n
        tanda = -tanda
        suku = tanda * Sudut ^ n / faktorial
    Loop
    Sinus = jumlah
End Function
```

### E.2.3. Kepekaan dan Bilangan Kondisi dari Suatu Masalah

Selain karena kelemahan komputasi, kesukaran mencari solusi suatu masalah masukan-keluaran juga dapat timbul karena sifat masalah itu sendiri, yaitu masalah yang hasil keluarannya sangat peka terhadap masukan yang nilainya agak meleset. Kepekaan ini dikuantifikasikan dengan “bilangan kondisi” (*condition number*) atau Kond sebagai berikut:

$$\text{Kond} = \frac{\left| \frac{\text{perubahan relatif hasil keluaran}}{\text{perubahan relatif data masukan}} \right|}{\left| \frac{\delta x}{x} \right|} = \frac{\left| \frac{u(x + \delta x) - u(x)}{u(x)} \right|}{\left| \frac{\delta x}{x} \right|},$$

Dengan:  $x$ ≡masukan,  $u(x)$  ≡ hasil keluaran yang bergantung pada  $x$ , dan  $\delta x$ ≡perubahan kecil pada  $x$ . Suatu masalah dikatakan *tak-peka* (*well-conditioned*) jika  $\text{Kond} \approx 1$ , dan dikatakan *peka* (*ill-conditioned*) jika  $\text{Kond} \gg 1$ .

### E.3. Kemantapan suatu Algoritma

Adanya kesalahan komputasi dapat menimbulkan masalah lain, yaitu ketidak-mantapan suatu algoritma yang bersifat “berubah dalam waktu” (*time-marching*). Suatu algoritma dikatakan mantap jika adanya suatu kesalahan kecil pada data masukan tidak akan menyebabkan timbulnya kesalahan besar pada hasil keluaran. Contoh algoritma tidak mantap ialah menghitung  $\sin(x)$  dari:  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$ . Meskipun deret ini secara matematik konvergen untuk setiap nilai  $x$  ( $\forall x$ ) dan nilai  $\sin(x)$  antara  $[-1,1]$ , tetapi jika dihitung dengan komputer, deret ini dapat menghasilkan nilai  $\sin(x)$  yang tidak diantara  $[-1,1]$ , terutama jika  $|x| \gg 0$ . Ketidakmantapan ini dapat dicegah dengan memanfaatkan sifat fungsi  $\sin(x)$  yang periodik dengan periode  $2\pi$ , yaitu  $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ ,  $\forall x$ .

Kesalahan adalah topik penting di subbidang analisis numerik, jadi hanya dibahas singkat di sini, karena tulisan ini lebih mementingkan aplikasi ilmu komputasi di bidang iptek nuklir dari pada analisis numerik. Meski demikian, dalam melakukan kegiatan komputasi ilmiah, kita perlu selalu melakukan *check & recheck* untuk yakin bahwa solusi pendekatan yang kita dapat tidak jauh menyimpang dari solusi sebenarnya yang tidak mungkin kita ketahui. Tanpa *check & recheck* adalah berbahaya, yaitu jika hasil komputasi menyangkut keselamatan dan nyawa banyak manusia seperti menghitung tebal tiang jembatan layang, tebal fondasi gedung pencakar langit, tebal perisai reaktor nuklir, struktur badan pesawat terbang, dan sebagainya. Intinya ialah, meski kesalahan komputasi tidak mungkin dihindari dan tidak mungkin diketahui dengan pasti, tetapi kita harus tahu perkiraan nilai kesalahan ini dan harus dapat kita kendalikan. Tugas ini amat dilematis, karena kita tidak mungkin tahu nilai solusi sebenarnya, jadi bagaimana kita pilih solusi pendekatan yang tidak boleh terlalu jauh dari solusi sebenarnya. Jadi perlu dibedakan antara kesalahan (*error*) yang masih dalam batas toleransi dan yang tidak, agar tidak terjadi kesalahan fatal yang berbahaya.

Tugas *check & recheck* antara lain dapat dilakukan dengan melakukan studi banding (*benchmarking*) lewat beberapa cara sebagai berikut:

1. Bandingkan hasil komputasi dengan suatu algoritma dengan hasil komputasi algoritma lain untuk solusi masalah yang sama.
2. Bandingkan hasil komputasi dengan teori atau hasil eksperimen untuk masalah yang sama atau hampir sama.
3. Bandingkan hasil komputasi dengan hasil komputasi ilmuwan lain yang dipublikasi di jurnal ilmiah untuk masalah yang sama atau hampir sama.
4. Untuk solusi masalah di suatu interval lebar yang dibagi dalam banyak interval kecil, bandingkan hasil komputasi dengan lebar interval atau langkah kecil  $h$  dengan  $h/2$ . Solusi tidak boleh terlalu peka atau sensitif terhadap lebar lebar  $h$ .
5. Lakukan analisis kepekaan dan bandingkan hasil komputasi *single-precision* dengan *double-precision*, demi mengurangi kesalahan pembulatan.

Inti dari studi perbandingan di atas ialah melakukan *check & recheck* untuk yakin bahwa hasil komputasi – jika ditinjau dari berbagai sudut pandang – harus KONSISTEN, alias TIDAK BOLEH TIMBUL KONTRADIKSI.