



# FILTER TANGGA LC OPTIMAL

Oleh Rustam Effendi \*)

## RINGKASAN

*Filter tangga LC optimal yang dikemukakan adalah filter dengan karakteristik amplitudo yang rata maksimal dan laju attenuasi tinggi di sekitar titik frekuensi batas (cut-off frequency). Filter Butterworth, sebagai filter pelalu frekuensi rendah (low-pass filter), cukup optimal jika ditinjau dari karakteristik amplitudonya yang rata maksimal (maximally flat), tetapi laju attenuasi di sekitar titik frekuensi batas (kemiringan kaki) masih kurang optimal dibandingkan dengan filter tangga LC pada order- $n$  yang sama.*

*Dilain pihak filter Tchebycheff, sebagai filter pelalu frekuensi tengah (band pass filter) memiliki laju attenuasi tinggi di sekitar titik frekuensi batasnya, tetapi kurang maksimal rata.*

*Di dalam tulisan ini dibandingkan karakteristik amplitudo (frequency response) filter tangga LC (filter kelas L) dan filter Butterworth (filter kelas B) dan teknik sintesa Darlington dan Cauer untuk merealisasikan bentuk rangkaian filter optimal bagi suatu pesawat penerima umumnya dan radio teleskop khususnya.*

## 1. PENDAHULUAN

Disain suatu pesawat penerima umumnya atau radioteleskop khususnya untuk mendeteksi suatu sinyal atau informasi, haruslah diusahakan kemungkinan untuk mendapatkan gangguan interferensi dari pemancar lain seminimal mungkin. Dan juga diusahakan pesawat penerima itu sepeka mungkin, mengingat daya masukan atau fluks radiasi yang diterima sangat kecil ( $10^{-22}$  sampai dengan  $10^{-15}$  watt/m<sup>2</sup>Hz).

\*) Staf Kelompok Penelitian Antariksa Dekat.

Salah satu cara untuk mencegah gangguan interferensi dari informasi yang tidak diinginkan adalah dengan mempertinggi kemampuan pesawat penerima untuk menerima atau mendeteksi informasi dengan frekuensi tertentu yang diinginkan. Cara ini sudah barang tentu dilakukan dengan mempergunakan filter yang seoptimal mungkin. Tolok ukur untuk mendapatkan filter yang seoptimal mungkin adalah membandingkan rancangan filter optimal Butterworth dan rancangan filter tangga LC optimal.

Keadaan optimal dari suatu filter dapat dijajaki dari karakteristik amplitudo di dalam daerah frekuensi atau frequency response dari filter. Pada umumnya karakteristik amplitudo dari filter dapat dinyatakan oleh persamaan berikut ini :

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + f(\omega^2)}} \quad (1-1)$$

di mana  $A(\omega)$  = amplitudo/tegangan keluaran filter di dalam daerah frekuensi rasional  $\omega$ , frekuensi rasional adalah perbandingan antara frekuensi sudut dan frekuensi sudut cut-off.

$A_0$  = amplitudo tegangan masukan filter, berharga 1 jika masukan filter berupa unit impulse.

$f(\omega^2)$  = fungsi rasional positif (selalu non negatif).

pada filter kelas B (kelas Butterworth), fungsi rasional positif dinyatakan oleh persamaan di bawah ini :

$$f(\omega^2) = \omega^{2n} \quad ; \quad n = \text{order filter} \quad (1-2)$$

pada filter kelas L (filter tangga LC), fungsi rasional positif dinyatakan oleh persamaan di bawah ini :

$$f(\omega^2) = L_n(\omega^2) \quad (1-3)$$

di mana  $L_n(\omega^2)$  = polinom yang dihasilkan dari polinom Legendre jenis pertama.

Selanjutnya pada filter bandpass Tchebycheff, fungsi rasional positif ditunjukkan oleh persamaan berikut :

$$f(\omega^2) = C_n^2(\omega) \quad (1-4)$$

di mana  $C_n(\omega)$  = polinomial Cosinus Tchebycheff,  $n$  menyatakan order filter Tchebycheff (filter kelas T).

## 2. FILTER BUTTERWORTH

Karakteristik amplitudo filter Butterworth, di dalam daerah frekuensi rasional  $w$ , ditunjukkan oleh persamaan

$$A(w) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + w^{2n}}} \quad (2-1)$$

persamaan (2-1) dapat dikuadratkan, yang menghasilkan :

$$A^2(w) = A(w) \cdot A^*(w) = \frac{A_0^2}{1 + w^{2n}} \quad (2-2)$$

di mana  $A^*(w)$  = bilangan kompleks sekawan  $A(w)$

Di dalam parameter  $s = jw$ , persamaan (2-2), menjadi :

$$A(s) \cdot A(-s) = \frac{A_0^2}{1 + (-s^2)^n} \quad (2-3)$$

Jika  $A_0$  menyatakan transformasi Laplace dari masukan berupa unit impulse, maka  $A_0 = 1$  dan  $A(s)$  dinamakan fungsi transfer atau impulse response, yang lazimnya ditulis dengan simbol  $H(s)$ . Untuk berbagai harga  $n$  fungsi transfer filter kelas B, ditabelkan sebagai berikut :

TABEL 1 : FUNGSI TRANSFER FILTER KELAS B

n (order filter)	H(s)	Fungsi tranfer H(jw)
1	$\frac{1}{1 + s}$	$\frac{1}{1 + jw}$
2	$\frac{1}{s^2 + 1,414s + 1}$	$\frac{1}{-w^2 + 1,414jw + 1}$
3	$\frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$	$\frac{1}{(jw+1)(-w^2+jw+1)}$
4	$\frac{1}{(s^2+0,760s+1)(s^2+1,848s+1)}$	$\frac{1}{(-w^2+0,76jw+1)(-w^2+1,848jw+1)}$
5	$\frac{1}{(s+1)(s^2+0,618s+1)(s^2+0,618s+1)}$	$\frac{1}{(jw+1)(-w^2+0,618jw+1)(-w^2+0,618jw+1)}$

### 3. TEKNIK SINTESA DARLINGTON

Salah satu teknik untuk merealisasikan bentuk sirkit suatu filter jika fungsi transfer  $H(s)$  telah diketahui, ialah dengan teknik sintesa Darlington.

Definisikan terlebih dahulu koefisien refleksi  $r(s)$ , dengan persamaan di bawah ini :

$$|r(s)|^2 = r(s) \cdot r(-s) = 1 - H^2(s) = \left| \frac{1 - Z_i(s)}{1 + Z_i(s)} \right|^2 \quad (3-1)$$

di mana  $Z_i(s)$  = impedansi reaktip minimal

Sebagai contoh untuk  $n = 3$ , dan  $H(s)$ , sesuai dengan tabel 1, diperoleh :

$$r(s) \cdot r(-s) = 1 - \frac{1}{1-s^6} = \frac{-s^6}{-s^6+1} \quad (3-2)$$

$$r(s) = \frac{s^3}{1 + 2s + 2s^2 + s^3} \quad (3-3)$$

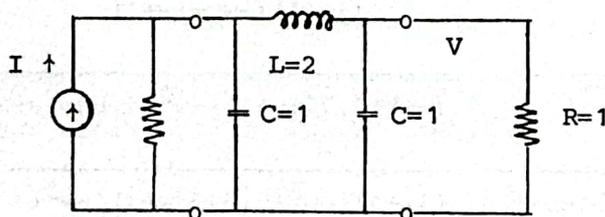
dan impedansi reaktip minimal  $Z_i(s)$  :

$$Z_i(s) = \frac{1-r(s)}{1+r(s)} = \frac{1 + 2s + 2s^2}{1 + 2s + 2s^2 + 2s^3} \quad (3-4)$$

Dengan cara Foster, persamaan (3-4) dapat diubah ke dalam bentuk berikut ini :

$$Z_i(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{2s + \frac{1}{s + \frac{1}{1}}}} \quad (3-5)$$

Realisasinya dengan mempergunakan komponen pasip LCR adalah :



Gambar 3.1

Filter kelas B, order-3 hasil sintesa  $\frac{A(w)}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + w^6}}$

#### 4. FILTER TANGGA LC OPTIMAL

Karakteristik amplitudo filter tangga LC, di dalam daerah frekuensi rasional  $w$ , dapat dinyatakan dengan persamaan di bawah ini :

$$A(w) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + L_n(w^2)}} \quad (4-1)$$

Pada frekuensi batas (frekuensi cut-off);  $w = 1$ ; haruslah terjadi penurunan penguatan sebesar 3 decibel, dan berlaku :

$$L_n(w=1) = 1 \quad (4-2)$$

Persyaratan untuk mendapatkan laju attenuasi tinggi, pada titik frekuensi sudut cut-off  $w_c$  ( $w=1$ ), menghendaki kecuraman polinomial  $L_n(w)$  adalah maksimal,  $M$  :

$$\left. \frac{d L_n(w^2)}{d w} \right|_{w=1} = M \quad (4-3)$$

Definisikan polinomial  $L_n(w^2)$ , untuk setiap  $n$  berharga ganjil ( $n = 2k+1$  ;  $k = 1, 2, \dots$  ) sebagai :

$$L_n(w^2) = \int_{-1}^{2w-1} v^2(x) dx \quad (4-4)$$

di mana  $v(x) = a_0 + a_1 P_1(x) + \dots + a_k P_k(x)$

$$a_0 = \frac{a_1}{3} = \frac{a_2}{5} = \frac{a_k}{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot (k+1)}$$

$P_k$  = polinomial Legendre jenis pertama

$$P_1(x) = x ; P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) ; \dots ;$$

Dari persamaan (4-4) diperoleh berturut-turut untuk  $k = 1$  dan  $k = 2$  atau untuk  $n = 3$  dan  $n = 5$  ;

$$L_3(w^2) = 3w^6 - 3w^4 + w^2 \quad (4-5)$$

dan

$$L_5(w^2) = 20w^{10} - 40w^8 + 28w^6 - 8w^4 + w^2 \quad (4-6)$$

Dengan mensubstitusikan  $p = jw$ , pada persamaan (4-5) dan (4-6) diperoleh berturut-turut :

$$L_3(-p^2) = -3p^6 - 3p^4 - p^2 \quad (4-7)$$

dan

$$L_5(-p^2) = -20p^{10} - 40p^8 - 28p^6 - 8p^4 - p^2 \quad (4-8)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (4-5) dan (4-6) ke persamaan (4-1) dan mengubah  $j\omega$  ke  $p$ , diperoleh

$$\frac{A_3^2(p)}{A_0^2=1} = H_3^2(p) = H_3(+p) H_3(-p) = \frac{1}{1-3p^6-3p^4-p^2} \quad (4-9)$$

dan

$$\frac{A_5^2(p)}{A_0^2=1} = H_5^2(p) = H_5(+p) H_5(-p) = \frac{1}{1-20p^{10}-40p^8-28p^6-8p^4-p^2} \quad (4-10)$$

Dengan mempergunakan teorema Hurwitz, diperoleh fungsi transfer filter tangga LC optimal  $H_3(p)$  dan  $H_5(p)$  dari persamaan (4-9) dan (4-10) :

$$H_3(p) = \frac{0,577}{p^3 + 1,310p^2 + 1,359p + 0,577} \quad (4-11)$$

$$H_5(p) = \frac{0,224}{p^5 + 1,551p^4 + 2,203p^3 + 1,693p^2 + 0,898p + 0,224} \quad (4-12)$$

Cara yang lebih sederhana untuk merealisasikan  $H_3(p)$  dan  $H_5(p)$  sebagai fungsi transfer filter tangga LC ke dalam bentuk sirkuit dengan terminal tahanan 1 Ohm, adalah mempergunakan metode sintesa Cauer. Metode ini terlebih dahulu menentukan driving point impedance dari fungsi transfer yang diperoleh, dengan membagi suku-suku berpangkat genap dengan suku-suku berpangkat ganjil dari penyebut fungsi transfer. Diperoleh driving point impedance dari  $H_3(p)$  dan  $H_5(p)$  berturut-turut :

$$Z_3(p) = \frac{1,31p^2 + 0,577}{p^3 + 1,359p} \quad (4-13)$$

dan

$$Z_5(p) = \frac{1,551p^4 + 1,693p^2 + 0,224}{p^5 + 2,203p^3 + 0,898p} \quad (4-14)$$

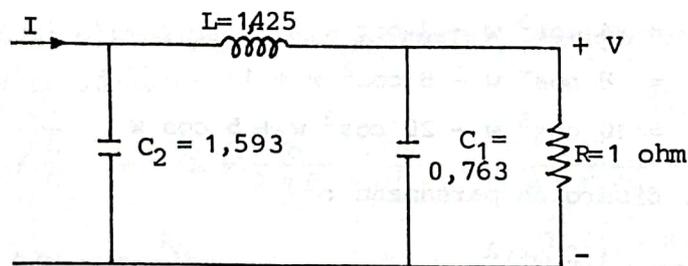
Dengan cara Foster persamaan (4-13) dan (4-14) dapat diubah ke bentuk fraksi berikut :

$$Z_3(p) = \frac{1}{0,763p + \frac{1}{1,425p + \frac{1}{1,593p}}} \quad (4-15)$$

dan

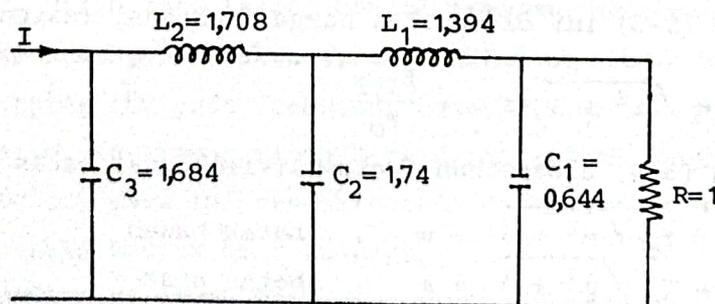
$$Z_5(p) = \frac{1}{0,644p + \frac{1}{1,394p + \frac{1}{1,74p + \frac{1}{1,708p + \frac{1}{1,684p}}}}} \quad (4-16)$$

Persamaan (4-15) dan (4-16) dapat direalisasikan di dalam bentuk sirkit pada gambar (4-1) dan (4-2) berikut :



Gambar 4-1 :

Realisasi untuk  $n = 3$ , filter tangga LC  
(filter kelas L)



Gambar 4-2 :

Realisasi untuk  $n = 5$ , filter tangga LC  
(filter kelas L)

## 5. FILTER TCHEBYCHEFF

Karakteristik amplitudo filter Tchebycheff ditunjukkan oleh persamaan berikut :

$$\frac{A(w)}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + C_n^2(w)}} \quad (5-1)$$

Di mana :

$C_n(w)$  adalah polinomial cosinus Tchebycheff.

Untuk berbagai harga  $n$ , polinomial Tchebycheff adalah :

$$\begin{aligned} C_1(w) &= \cos w = 1 - \frac{(1-w^2)^2}{2w^2m^2}, \quad m = \left| \frac{L_2}{L_1} \right|^{\frac{1}{2}} \\ C_2(w) &= 2 \cos^2 w - 1 \\ C_3(w) &= 4 \cos^3 w - 3 \cos w \\ C_4(w) &= 8 \cos^4 w - 8 \cos^2 w + 1 \\ C_5(w) &= 16 \cos^5 w - 20 \cos^3 w + 5 \cos w \end{aligned}$$

pada  $n = 1$ , diperoleh persamaan :

$$-1 \leq 1 - \frac{(1-w^2)^2}{2w^2m^2} \leq +1 \quad (5-2)$$

Dengan mengambil limit atas persamaan (5-2), ini berarti  $w=1$ , sehingga diperoleh frekuensi pass band  $f = f_0 =$  frekuensi resonansi. Selanjutnya dengan mengambil limit bawah persamaan (5-2), diperoleh persamaan (5-3) berikut ini :

$$w^2 \pm 2mw + 1 = 0 \quad (5-3)$$

Dari persamaan (5-3) ini didapatkan harga frekuensi rasional :

$$w_{1,2} = \sqrt{m^2 + 1} \pm m = \frac{f_{1,2}}{f_0} \quad (5-4)$$

Dari persamaan (5-4) didapatkan frekuensi-frekuensi batas (cut-off)

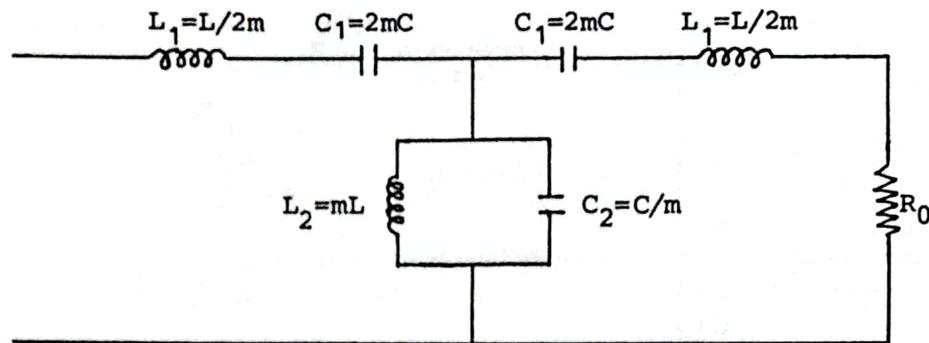
$$f_1 = f_0 \sqrt{m^2 + 1} - m, \quad \text{batas bawah} \quad (5-5)$$

$$f_2 = f_0 \sqrt{m^2 + 1} + m, \quad \text{batas atas} \quad (5-6)$$

Realisasi filter band-pass, dengan mengambil harga

$$f_1 f_2 = f_0^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} \quad \text{dan} \quad m = \frac{f_2 - f_1}{2} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 5-1 :

Band-pass filter order-1,  $n = 1$

Adapun harga-harga elemen pasip dan parameter lainnya dari sirkit pada gambar 5-1 di atas adalah :

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad ; \quad L = \frac{R_0}{2 \pi f_0} \quad ; \quad C = \frac{1}{2 \pi f_0 R_0}$$

$$L_1 = L/m = \frac{R_0}{\pi(f_2 - f_1)} \quad ; \quad L_2 = mL = \frac{R_0(f_2 - f_1)}{4 \pi f_1 f_2}$$

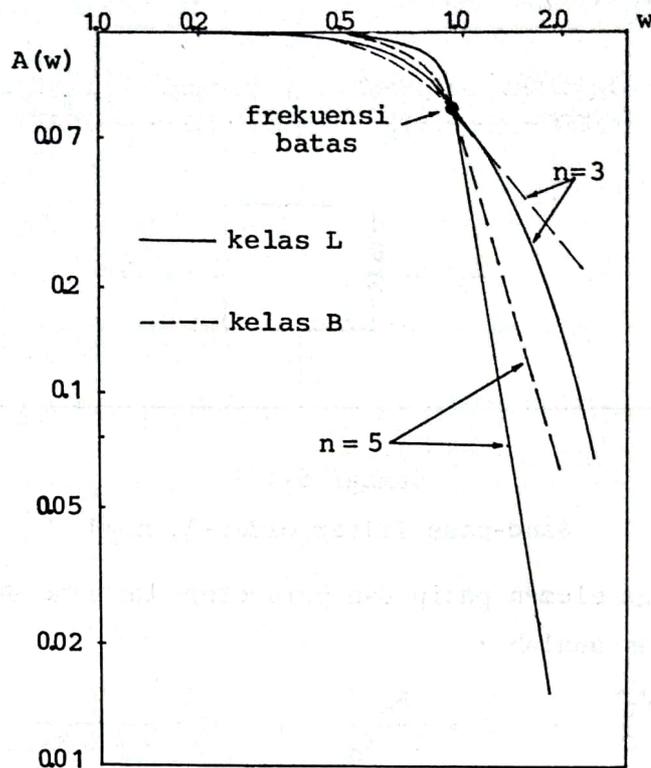
$$C_1 = m C = \frac{(f_2 - f_1)}{4 \pi R_0 f_1 f_2} \quad ; \quad C_2 = C/m = \frac{1}{\pi R_0 (f_2 - f_1)}$$

## 6. PERBANDINGAN KARAKTERISTIK FILTER KELAS B DAN KELAS L.

Karakteristik amplitudo filter dapat ditunjukkan oleh bentuk frequency response filter. Makin rata (flat) bentuk frequency responsenya sepanjang daerah frekuensi batas, dikatakan filter makin optimal menuju sifat idealnya. Di samping itu pada frekuensi batas dikehendaki juga kemiringan (slope) yang tajam. Ketajaman slope bisa ditingkatkan dengan meningkatkan order filter, tetapi cara ini mengakibatkan makin banyak komponen yang diperlukan dan makin banyak mencatu daya.

Pada gambar 6-1 di bawah ini, dibandingkan karakteristik filter Butterworth dan filter tangga LC :

Gambar 6-1 : .....



Gambar 6-1 :

Perbandingan karakteristik filter kelas L dan filter kelas B (Butterworth).

Dari gambar 6-1, di atas jelas untuk order yang sama antara filter optimal kelas L dan filter kelas B, filter kelas L memiliki slope yang lebih tajam pada frekuensi batas, tetapi kurang rata dibandingkan dengan filter kelas B.

## 7. KESIMPULAN

Telah dilakukan sintesa terhadap filter kelas B (Butterworth) filter kelas L, di mana untuk order yang sama filter kelas B adalah dengan filter frekuensi response yang lebih rata, sedangkan filter kelas L memiliki slope yang lebih tajam. Hal ini berarti, jika response untuk keadaan transient perlu dipertimbangkan, maka filter kelas L adalah optimal. Telah dilakukan pula sintesa terhadap filter band-pass Tchebycheff order 1 (satu). Hasil sintesa menunjukkan harga-harga elemen pasip RLC untuk merealisasikan bentuk rangkaian yang diinginkan ditentukan juga oleh lebar pita frekuensi  $f_2 - f_1$ .

## DAFTAR PUSTAKA

1. A. PAPOULIS : "Optimum Filter With Monotonic Responce",  
Proceedings of the IRE, 1985.
2. E.M. GRABE et. al. :  
"Handbook of Automation", Computation and Control,  
Volume 1, John Wiley, 1958.
3. S.RAMABHADRAN : "Telecommunications Principles", Circuits and  
Systems, Khanna Publishers, Delhi 6, 1976.
4. ZEVEKE et. al. : "Analysis of Electric Circuits", Mir Publisher  
Moscow, 1980.

- - - oo0oo - - -

## DISKUSI

### 1. KOESWADI

Tanya : Bagaimana masalah dimensi :

$$A(\omega) = \frac{A_0}{(1 + f(\omega)^2)^{1/2}}$$

$$f(\omega) = \omega^{2n}$$

Jawab :  $\omega$  = frekuensi radian = perbandingan frekuensi dan frekuensi Cut-off, jadi non-dimensional.

Tanya : Apakah maksud dari  $A(\omega)$  dikalikan dengan kompleks konjugatnya ?

Jawab : Karena  $A(\omega)$  adalah bilangan kompleks, maka nilai kuadratnya bisa diperoleh dari mengalikan  $A(\omega)$  dengan kompleks konjugatnya.

Tanya : Bagaimana kesimpulan dari kollokium ini ?

Jawab : Kesimpulannya adalah mendapatkan filter tangga LC yang optimal dan bagaimana cara merealisasikan bentuk sirkuitnya.

### 2. B. GULTOM

Tanya : Apakah tidak dibahas mengenai stabilitas sistem ?

Jawab : Pembicaraan mengenai filter menyangkut sistem loop terbuka, tanpa kontrol feedback atau feedforward, jadi masalah stabilitas tidak dibicarakan, karena sistemnya telah terprogram stabil.

Tanya : Menurut hemat kami, dengan Foster ini ada muncul error, misalnya round-off error di dalam mencari  $r(t)$ . Dengan filter apa ini diatasi ?

Jawab : Cara Foster dipergunakan untuk mengubah impedansi reaktif ke dalam bentuk fraksi-fraksi. Kesalahan yang muncul adalah di dalam pembulatan pembagian. Jika toleransi yang diinginkan telah terpenuhi, berarti kesalahan pembulatan itu telah diabaikan.

Tanya : Mohon dijelaskan wilayah dari filter Tchebycheff (daerah pemakaiannya) !

Jawab : Filter Tchebycheff adalah filter band-pass, yang dapat dipergunakan pada daerah pre-detection (deteksi awal). Setelah daerah post detection dipergunakan low-pass filter kelas L atau kelas B.

### 3. MASPUL AINI KAMBRY

Tanya : Kira-kira bagaimana penerapan filter ini di Stasiun Pengamat Matahari Tanjungsari ?

Jawab : Filter ini dapat diterapkan di setiap sistem komunikasi, tetapi harga-harga parameter rangkaianannya berbeda sesuai dengan spesifikasi yang diinginkan.

4. CHUNAENI LATIEF

Tanya : Bagaimana perbandingan filter Butterworth dan filter Tchebycheff mana yang lebih baik ?

Jawab : Filter Butterworth adalah filter low-pass, hanya bisa diubah menjadi high-pass dengan menukar  $w$  menjadi  $w^{-1}$ . Filter Tchebycheff adalah filter band-pass, hanya bisa diubah menjadi band-stop (band-reject) dengan menukar  $w$  menjadi  $w^{-1}$ . Karenanya tidak ada korelasi yang dapat membandingkan kedua jenis filter ini.

Tanya : Seberapa jauh ketajaman filter (order) untuk mendekati ideal ?

Jawab : Keadaan ideal dicapai pada  $n$  yang tak terbatas, ini tidak mungkin bisa direalisasikan, sehingga pengertian ideal dalam aplikasi adalah keadaan optimal, dimana error yang dihasilkan telah bisa ditoleransi, sesuai dengan yang diinginkan oleh bidangnya masing-masing. Bidang riset tentunya menuntut toleransi yang lebih tinggi dari bidang industri.

Tanya : Apakah dengan menambah komponen tidak terjadi drop ?

Jawab : Tentu saja makin banyak komponen diperlukan power yang lebih banyak. Oleh karena itu optimalisasi diperlukan untuk mendapatkan kompromi yang tepat dari 2 hal yang kontradiksi.

5. BACHTIAR ANWAR

Tanya : Apakah cut-off frekuensi sama dengan frekuensi resonansi ?

Jawab : Cut-off frekuensi adalah frekuensi di mana amplitudo turun menjadi 0,707 dari amplitudo maksimalnya, dari frekuensi responsenya. Frekuensi resonansi adalah frekuensi di mana amplitudo adalah maksimal.

Tanya : Berapa dB kemiringan pada cut-off frekuensi ?

Jawab : Pada cut-off frekuensi amplitudo turun 3 dB dari maksimal.

6. TATANG SOELAEMAN

Tanya : Kalau kita cari harga L dan C dengan cara sintesa akan didapatkan harga yang janggal, mohon komentar !

Jawab : Kejanggalan terjadi karena hasil-hasil sintesa tidak bisa direalisasikan oleh keterbatasan komponen yang tersedia di pasaran khususnya di Indonesia, adalah umum terjadi. Untuk ini usahakan membulatkan angka-angka hasil sintesa, sampai ke batas toleransi yang sesuai. Atau membuat rangkaian ekuivalen seri paralel atau hybrid dari komponen yang susah didapatkan itu.

Tanya : Pembuatan/rencana design filter tergantung kebutuhan (kompromi antara pengambilan tingkat untuk menentukan L dan C yang dibutuhkan. Mohon tanggapan !

Jawab : Hampir sama dengan pertanyaan saudara Chunaeni Latief, kompromi terletak pada toleransi kesalahan yang bisa diterima.

Tanya : Teoritis sampai frekuensi berapa filter L-C ini ?

Jawab : Daerah frekuensi sudah tentu dibatasi oleh kemampuan fisis dari komponen terutama kapasitornya. Untuk frekuensi tinggi dapat dipilih kapasitor mika atau keramik.

- - - oo0oo - - -