FUNGSI AUTOKORELASI DAN FUNGSI AUTOKORELASI PARSIL

Oleh Suharnis Syamsuar *)

RINGKASAN

Fungsi-fungsi autokorelasi dan autokorelasi parsil memegang peranan penting dalam menentukan model dari Time Series (Proses Stochastik). Dari itu sebelum kita menggunakan fungsi-fungsi tersebut sebagai alat untuk pemilihan model, ada baiknya kita meninjau dulu apa yang disebut fungsi autokorelasi ataupun fungsi autokorelasi parsil itu.

1. PENDAHULUAN

Masalah Forecasting (ramalan) adalah suatu hal yang sangat penting sekali dalam menentukan perkiraan nilai yang akan terjadi disaat yang akan datang dari gejala-gejala alam yang kita selidiki. Misalnya saja peramalan cuaca. Untuk menentukan ramalan ini, tentu diperlukan data dari masalah yang kita selidiki dalam suatu interval waktu tertentu. Misalkan kita punyai suatu data observasi z_{t_1}, z_{t_2}, ..., z_{t_N} yang diperoleh pada waktu-waktu t_1, t_2, ..., t_N. Selanjutnya kita ingin menentukan (meramalkan) nilai dari z_{t_N+1}, dan z_{t_N+2} yang akan terjadi pada waktu-waktu $t_N + 1$ dan $t_N + 2$. Untuk dapat menentukan z_{t_N+1} dan z_{t_N+2} ini diperlukan terlebih dulu model dari data observasi yang sudah ada. Kalau model sudah diperoleh dan sudah di test, baru model tersebut kita gunakan untuk peramalan.

Ada beberapa model dasar yang digunakan dalam forecast (peramalan). Jika kita menggunakan model-model Stokhastik, kita akan bekerja dengan <u>autokorelasi</u> dan <u>autokorelasi parsil</u>, untuk menentukan model-model mana

*) Ka. Kelompok Penelitian Matematik.

dari proses stokhastik yang akan digunakan. Apakah Moving Average, Autoregresive, dan sebagainya.

Dalam pembicaraan ini, kita akan membicarakan mengenai autokorelasi dan autokorelasi parsil beserta standard errornya. Akhirnya kita singgung hubungannya dengan proses Autoregresive dan proses Moving Average.

2. TIME SERIES DAN PROSES STOKHASTIK

2.1 Time Series

Suatu time series adalah suatu himpunan dari observasi yang dibentuk secara barisan di dalam waktu. Jika himpunan itu kontinu, time series dikatakan kontinu. Jika himpunan diskrit, maka time series dikatakan diskrit. Untuk time series yang diskrit, kita tulis nilai-nilai observasi dengan z_{t_1}, z_{t_2}, ..., z_{t_N} yang diperoleh pada waktu-waktu t_1, t_2, ..,t_N. Jika nilai yang akan datang dari suatu time series bisa secara tepat ditentukan oleh beberapa fungsi matematik, misalnya :

$$z_t = \cos(2\pi f t)$$

time series disebut deterministik, tapi kalau nilai-nilai yang akan datang hanya dapat ditentukan suatu distribusi kemungkinan, time series disebut non-deterministik atau suatu time series statistik.

2.2 Proses Stokhastik

Suatu fenomena statistik yang berkembang dalam waktu sesuai dengan hukum-hukum probabilistik disebut suatu proses stokhastik. Biasanya orang sering menyebut kata proses saja dan menghilangkan kata stokhastiknya.

3. PROSES STOKHASTIK STASIONER

Suatu hal khusus dari proses stokhastik disebut proses stasioner, yang didasarkan pada asumsi bahwa proses berada dalam suatu keadaan khusus dari keseimbangan statistik. Suatu proses stokhastik dikatakan stasioner kuat (Strictly Stationary) jika sifatnya tidak terpengaruh (tetap) oleh suatu perobahan waktu awal; yaitu jika joint probability distribusi yang dihubungkan dengan m observasi z_{t_1}, z_{t_2}, ... , z_{t_m} yang diambil pada waktu-waktu t_1, t_2, ... , t_m sama seperti bila dihubungkan dengan m observasi $z_{t_1+k}, z_{t_2+k}, \ldots\ldots, z_{t_m+k}$ yang diambil pada waktu-waktu $t_1+k, t_2+k, \ldots\ldots, t_m+k$.

3.1 Mean dan variasi dari suatu proses stasioner

Bila m=1 asumsi kestasioneran memberikan bahwa distribusi peluang $p(z_t)$ adalah sama untuk semua waktu t dan bisa ditulis p(z). Jadi proses stokhastik mempunyai suatu mean yang konstan :

$$\mu = E(z_t) = \int_{-\infty}^{\infty} z p(z)\ dz \tag{3-1}$$

yang mendefinisikan level di sekitar mana dia berfluktuasi, dan suatu variansi yang konstan :

$$\sigma_z^2 = E[(z_t - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (z - \mu)^2\ p(z)\ dz \tag{3-2}$$

yang mengukur sebenarnya di sekitar level ini. Karena probability distribusi p(z) sama untuk semua waktu t, susunannya bisa dirobah dengan membentuk histogram dari observasi $z_1, z_2, \ldots, z_N$ yang diambil dari time series observasi. Mean μ dari proses stokhastik bisa diestimasi (ditaksir) oleh mean :

$$\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} z_t \tag{3-3}$$

dari time series, dan variansi σ_z^2 dari proses stokhastik dapat ditaksir oleh variansi :

$$\hat{\sigma}_z^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (z_t - \bar{z})^2 \tag{3-4}$$

3.2 Koefisien Autokovariansi dan Koefisien Autokorelasi

Asumsi stasioner juga memberikan joint probability distribusi $p(z_{t_1}, z_{t_2})$ adalah sama untuk semua waktu t_1, t_2. Kovariansi antara z_t dan z_{t+k} yang dipisahkan oleh interval atau log k dari waktu disebut autokovariansi pada log k dan didefinisikan oleh :

$$\gamma_k = \text{cov}\ [z_t, z_{t+k}] = E[(z_t - \mu)\ (z_{t+k} - \mu)] \tag{3-5}$$

Hal yang serupa untuk autokorelasi pada log k adalah :

$$\rho_k = \frac{E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(z_t - \mu)^2]\ E[(z_{t+k} - \mu)^2]}} \tag{3-6}$$

$$\rho_k = \frac{E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)]}{\sigma_z^2} \qquad (3\text{-}7)$$

karena untuk proses stasioner, variansi $\sigma_z^2 = \gamma_0$ adalah sama pada waktu t+k dan waktu t.

Dengan demikian autokorelasi pada log k adalah :

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \qquad (3\text{-}8)$$

yang memberikan $\rho_0 = 1$

3.3 Syarat yang dipenuhi oleh autokorelasi dari suatu proses stasioner

Matriks kovariansi yang dihubungkan dengan suatu proses stasioner untuk observasi $(z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n)$, yang dibuat pada n waktu yang berurutan adalah :

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-3} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}9)$$

$$\sigma_z^2 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \rho_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma_z^2 \, P_n \qquad (3\text{-}10)$$

matriks Γ_n ini simetris dengan elemen yang konstan pada diagonal utamanya, dan matriks ini disebut matriks autokovariansi, dan matriks korelasi P_n disebut matriks autokorelasi. Pandang suatu fungsi linier dari random variabel $z_t, z_{t-1}, z_{t-r}, \ldots\ldots, z_{t-n+1}$.

$$L_t = l_1 z_t + l_2 z_{t-1} + \ldots\ldots + l_n z_{t-n+1} \qquad (3\text{-}11)$$

Karena cov $[z_i, z_j] = \gamma_{|j-i|}$ untuk suatu proses stasioner, variansi dari L_t adalah :

$$\mathrm{Var}\,[L_t] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} l_i\, l_j\, \gamma_{|j-i|} \qquad (3\text{-}12)$$

yang lebih besar dari nol jika l tidak semuanya nol. Selanjutnya matriks autokovariansi dan matriks autokorelasi definit positip untuk suatu proses stasioner. Ini akan memberikan bahwa determinan dan semua minor-minor utama dari matriks autokorelasi lebih besar dari nol. Misalnya :

untuk n = 2

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

sehingga $1 - \rho_1^2 > 0$

jadi $-1 < \rho_1 < 0$

Hal yang serupa untuk n = 3 , kita punyai :

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} > 0 , \quad \begin{vmatrix} 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

yang memberikan :

$$-1 < \rho_1 < 1$$

$$-1 < \rho_2 < 1$$

$$-1 < \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} < 0$$

dan seterusnya. Dari contoh-contoh di atas kelihatan syarat yang harus dipenuhi oleh autokorelasi untuk suatu proses yang stasioner.

3.4 Proses Gauss

Jika distribusi probability yang dihubungkan dengan suatu himpunan waktu adalah suatu distribusi normal multivariate, proses-proses disebut suatu proses normal atau Gauss. Karena distribusi normal multivariate secara lengkap dikarakterisasikan oleh moment-momentnya dari orde pertama dan orde kedua, eksistensi dari suatu mean μ yang tetap dan suatu matriks Γ_n untuk semua n, akan cukup menjamin kestasioneran dari suatu proses Gauss.

4. FUNGSI-FUNGSI AUTOKOVARIANSI DAN AUTOKORELASI

Sudah kita lihat sebelum ini bahwa koefisien autokovariansi γ_k pada log k, mengukur kovariansi antara dua nilai z_t dan z_{t+k}. Plot dari γ_k terhadap log k disebut fungsi autokovariansi $\{\gamma_k\}$ dari suatu proses stokhastik. Hal yang serupa, plot dari koefisien autokorelasi ρ_k sebagai suatu fungsi dari log k disebut fungsi autokorelasi $\{\rho_k\}$ dari proses. Perlu dicatat bahwa fungsi autokorelasi tanpa dimensi, yaitu bebas dari ukuran skala time series. Karena itu mengetahui $\gamma_k = \rho_k \sigma_z^2$ dari fungsi autokorelasi $\{\rho_k\}$ dan dari variansi σ_z^2 adalah ekivalen dengan mengetahui fungsi autokovariansi $\{\gamma_k\}$.

5. ESTIMASI DARI FUNGSI-FUNGSI AUTOKOVARIANSI DAN AUTOKORELASI

Dalam praktek kita punyai suatu time series yang terhingga $z_1, z_2, \ldots, z_N$ dari N observasi, di mana kita hanya bisa mendapatkan estimasi (taksiran) dari autokorelasi.

Mengenai estimasi dari autokovariansi dan autokorelasi ini didiskusikan secara khusus dalam buku, "Spectral Analysis and Its Applications", Holden-Day, San Francisco (1968) oleh Jenkins, G.M. and Watts, D.G. Para ahli statistik berkesimpulan bahwa estimasi yang hampir memenuhi dari ρ_k adalah :

$$r_k = \frac{C_k}{C_o} \tag{5-1}$$

di mana $$C_k = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{n-k} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z}) \quad , k= 0,1,\ldots, K \tag{5-2}$$

adalah estimasi dari γ_k dan $\bar{z}$ mean dari time series.

6. STANDARD ERROR DARI ESTIMASI AUTOKORELASI

Untuk mengidentifikasikan model dari suatu time series perlu di cek ρ_k, apakah secara efektif nol sesudah suatu log tertentu. Untuk maksud ini formula Bartlett, (Jour. Royal Stat, Soc; B 827, 1946) untuk suatu proses stasioner normal dengan menganggap $\rho_k = 0$ untuk $k > K$

$$\text{cov}\ [r_k, r_{k+s}] \simeq \frac{1}{N} \Sigma\, \rho_v\, \rho_{v+s}\ ,\ v > K$$

dengan mengambil $s = 0$, formula Bartlett, memberikan untuk semua $k > K$

$$\text{var}\ [r_k] \simeq \frac{1}{N} \sum_{v=-K}^{K} \rho_v^{\ 2}$$

dan untuk N yang besar, jika $\rho_k = 0$, r_k mendekati distribusi normal. Dalam praktek ρ_v diganti dengan r_v jadi :

$$\text{var}\ [r_k] \simeq \frac{1}{N}\ [1 + 2 \sum_{1}^{K} r_v^{\ 2}] \tag{6-1}$$

dan standard error dari r_k yang ditulis dengan $SE[r_k]$ adalah :

$$SE\ [r_k] = \{\frac{1}{N}\ [1 + 2 \sum_{1}^{K} r_v^{\ 2}]^{\frac{1}{2}}\} \tag{6-2}$$

7. FUNGSI AUTOKORELASI PARSIL

Fungsi autokorelasi parsil ditulis $\{\phi_{kk};\ k = 1,2,\ldots\}$, yang merupakan himpunan dari autokorelasi parsil pada log k, dia didefinisikan oleh :

$$\phi_{kk} = |P_k^*| \Big/ |P_k| \tag{7-1}$$

di mana P_k matriks autokorelasi orde k x k dan P^* adalah P_k dengan kolom terakhir diganti oleh :

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_k \end{bmatrix}$$

dengan demikian :

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\rho_2 - \rho^{\ 2}}{1 - \rho_1^{\ 2}}$$

$$\phi_{33} = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}$$

dan seterusnya.

Untuk estimasi dari $\hat{\phi}_{kk}$ diperoleh dengan mengganti ρ_k dengan r_k. Pada log yang cukup besar formula Quenouille (Quenouille, M.H., "Approximate Test of Corelation in Time Series", J.R. Statist. Soc. B 11, 68-64(1949) memberikan :

$$\text{var } [\hat{\phi}_{kk}] \simeq \frac{1}{N} \tag{7-2}$$

$$\text{S E } [\hat{\phi}_{kk}] \simeq \frac{1}{N} \tag{7-3}$$

8. FUNGSI AUTOKORELASI DARI PROSES AUTOREGRESIVE

Bentuk umum untuk suatu proses autoregresive orde p yang ditulis AR(p) adalah :

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \ldots\ldots + \phi_p z_{t-p} + a_t \tag{8-1}$$

di mana nilai observasi sebarang dari proses dinyatakan sebagai suatu penjumlahan ditimbang (weighted sum) dari nilai-nilai yang telah lalu ditambah dengan Shock (gangguan) sebarang. Dengan demikian z_t dapat dikatakan diregresikan terhadap p nilai-nilai observasi sebelumnya. Kita dapat menulis persamaan (8-1) dalam bentuk :

$$\phi(B)\, z_t = a_t \tag{8-2}$$

di mana :

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots\ldots\ldots - \phi_p B^p$$

merupakan operator AR(p).

Pandang sekarang proses AR(1) dengan model :

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + a_t \tag{8-3}$$

di mana seperti biasa random shock $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$, dan model diasumsikan stationary. Karena a_t bebas dari z_{t-1}, maka dengan mengambil variansi memberikan :

$$\sigma_z^2 = \phi_1^2 \sigma_z^2 + \sigma_a^2$$

sehingga :

$$\sigma_z^2 (1 - \phi_1^2) = \sigma_a^2$$

dan untuk σ_z^2 yang terhingga dan non-negatip, ini memberikan :

$$-1 < \phi_1 < 1$$

Ini adalah syarat untuk stasioner. Hal ini juga dapat ditulis $1 - \phi_1 B$ mempunyai harga nol yang lebih besar dari 1, dan umumnya syarat perlu dan cukup untuk suatu proses AR(p) adalah bahwa harga-harga nol dari $\phi(B)$ akan berada di luar lingkaran kesatuan. Dengan mengambil ekspektasi dalam persamaan (8-3):

$$E[z_t] = \phi_1 E[z_{t-1}] + E[a_t]$$

Karena proses stasioner dan $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$, tentu

$$\mu = \phi_1 \mu$$

sehingga karena $\phi_1 \neq 1$ maka $\mu = 0$

Kalikan persamaan (8-3) dengan z_{t-k} dan ambil ekspektasinya diperoleh :

$$E[z_t z_{t-k}] = \phi_1 E[z_{t-1} z_{t-k}] + E[a_t z_{t-k}]$$

Dengan demikian, untuk $k \geqslant 1$ yang menjamin bahwa a_t dan z_{t-k} bebas :

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1}$$

suatu persamaan differensi orde pertama dengan solusi :

$$\gamma_k = \phi_1^k \gamma_o$$

atau

$$\rho_k = \phi_1^k \quad , \quad k \geqslant 1$$

Autokorelasi parsil dari AR(1). Dari butir 7 kita punyai :

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix} \bigg/ \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

karena

$$\rho_k = \phi_1^k \quad , \quad k \geqslant 1$$

maka $\phi_{22} = \dfrac{\phi_1^2 - \phi_1^2}{1 - \phi_1^2} = 0 \quad , \quad$ karena $\phi_1 \neq 1$

Hal yang serupa akan diperoleh :

$$\phi_{kk} = 0 \quad \text{untuk} \quad k > 1$$

Kelihatan dari proses AR(1) bahwa autokorelasi ρ_k tidak nol untuk $k \geqslant 1$. Tapi autokorelasi parsil ϕ_{kk} akan nol untuk $k > 1$. Selanjutnya marilah kita lihat untuk proses AR(2), yang bentuknya :

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + a_t$$

Kalikan bentuk di atas dengan z_{t-k}, dan selanjutnya ambil nilai ekspektasinya, maka kita peroleh :

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}$$

dan bagi lagi dengan γ_o, maka diperoleh autokorelasi :

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}$$

Dalam praktek $\rho_o = 1$, maka untuk ρ_1 ,

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_{-1}$$

$$\text{maka } \rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

$$\text{dan } \rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_o$$

$$\rho_2 = \phi_1 \left(\frac{\phi_1}{1 - \phi_2}\right) + \phi_2$$

$$= \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2$$

Dengan cara yang serupa kita bisa menentukan ρ_k untuk $k \geqslant 3$.

Untuk autokorelasi parsil, seperti sebelumnya diperoleh :

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_1 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \phi_2$$

$$\text{dan } \phi_{kk} = 0 \quad \text{untuk} \quad k \geqslant 3$$

9. FUNGSI AUTOKORELASI DAN PROSES MOVING AVERAGE

Model dari proses moving average orde q yang ditulis proses MA(q) adalah :

$$z_t = a_t + \theta_1 a_{t-1} + \ldots\ldots + \theta_q a_{t-q} \qquad (9-1)$$

di mana seperti biasa a_t berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi σ_a^2. Ini dapat ditulis :

$$z_t = \theta(B)\, a_t \qquad (9-2)$$

di mana $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \ldots\ldots + \theta_q B^q$ adalah operator MA(q). Dengan mengambil variansi-variansi kita peroleh :

$$\sigma_z^2 = (1 + \theta_1^2 + \ldots\ldots + \theta_q^2)\, \sigma_a^2 \qquad (9-3)$$

dan untuk q terhingga, proses selalu stasioner.
Persamaan (9-2) bisa ditulis :

$$\theta^{-1}(B)\, z_t = a_t$$

yang berbentuk :

$$z_t - \pi_1 z_{t-1} - \pi_2 z_{t-2} - \ldots\ldots = a_t$$

atau

$$\pi(B)\, z_t = a_t \qquad (9-4)$$

Proses MA(q) dikatakan invertible jika bobot-bobot π membentuk suatu deret yang konvergen, yaitu jika dan hanya jika harga-harga nol dari $\theta(B)$ semuanya berada di luar lingkaran kesatuan, suatu syarat yang analog untuk stasioner dari proses AR(p). Selanjutnya kita akan memandang proses MA(q) kita adalah invertible.

Marilah kita tinjau sekarang proses MA(1) yang ditulis :

$$z_t = a_t + \theta a_{t-1}$$

di mana $\{a_t\}$ suatu proses gangguan (White Noise). Untuk syarat invertible $-1 < \theta < 1$, dengan mengambil ekspektasi diperoleh $\mu = 0$. Juga untuk semua k,

$$E[z_t z_{t-k}] = E[(a_t + \theta a_{t-1})(a_{t-k} + \theta_{t-1-k})]$$

sehingga

$$\sigma_z^2 = \gamma_o = (1 + \theta^2)\, \sigma_a^2$$

$$\gamma_1 = \theta\,\sigma_a^2$$

dan $\gamma_k = 0 \quad \text{untuk} \quad k > 1$

Kalau kita bagi persamaan di atas dengan γ_o, kita peroleh fungsi-fungsi autokorelasi :

$$\rho_1 = \frac{\theta}{1 + \theta^2}$$

$$\rho_k = 0 \quad \text{untuk} \quad k > 1$$

Akan tetapi fungsi autokorelasi parsil tidak akan nol untuk $k > 1$. Bentuknya akan diperoleh setelah dilakukan beberapa manipulasi aljabar :

$$\phi_{kk} = |P_k^*| \,/\, |P_k|$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}\,\theta^k (1 - \theta^2)}{1 - \theta^{2(k+1)}}$$

Sebagai contoh marilah kita lihat ϕ_{11} dan ϕ_{22}.

$$\phi_{11} = \rho_1$$

sedangkan

$$\rho_1 = \frac{\theta}{1 + \theta^2}$$

tentu

$$\phi_{11} = \frac{\theta}{1 + \theta^2} = \frac{\theta\,(1 - \theta^2)}{(1 - \theta^2)(1 + \theta^2)}$$

$$= \frac{\theta(1 - \theta^2)}{1 - \theta^4} = \frac{\theta^1\,(1 - \theta^2)}{1 - \theta^{2(1+1)}}$$

Begitu juga untuk ϕ_{22}

$$\phi_{22} = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

karena

$$\rho_2 = 0 \text{ , maka } \phi_{22} = \frac{-\rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\phi_{22} = \frac{-\dfrac{\theta^2}{(1+\theta^2)^2}}{1-\dfrac{\theta^2}{(1+\theta^2)^2}} = \frac{\dfrac{-\theta^2}{(1+\theta^2)^2}}{\dfrac{(1+\theta^2)^2-\theta^2}{(1+\theta^2)^2}} = \frac{-\theta^2}{(1+\theta^2)^2-\theta^2}$$

$$= \frac{-\theta^2}{1+2\theta^2+\theta^4-\theta^2} = \frac{-\theta^2}{1+\theta^2+\theta^4} =$$

$$= \frac{-\theta^2\ (1-\theta^2)}{(1-\theta^2)(1+\theta^2+\theta^4)} = \frac{-\theta^2\ (1-\theta^2)}{1+\theta^2+\theta^4-\theta^2-\theta^4-\theta^6}$$

$$= \frac{-\theta^2\ (1-\theta^2)}{1-\theta^6}$$

$$\phi_{22} = \frac{-\theta^2\ (1-\theta^2)}{1-\theta^{2\,(2+1)}}$$

Dengan demikian kelipatan untuk proses MA(1) fungsi autokorelasi parsil tidak nol untuk semua k, tapi hanya tambah besar k, dia tambah mengecil, menuju nol.

Proses MA(2)

Untuk proses MA(2) bentuknya :

$$z_t = a_t - \theta_1\, a_{t-1} - \theta_2\, a_{t-2}$$

di mana $\{a_t\}$ suatu proses white noise.

Proses MA(2) ini stasioner untuk semua nilai dari θ_1 dan θ_2. Akan tetapi dia hanya invertible jika akar-akar dari persamaan karakteristik :

$$1 - \theta_1\, B - \theta_2\, B^2 = 0$$

berada di luar lingkaran kesatuan, yaitu :

$$\theta_2 + \theta_1 < 1$$

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$

$$-1 < \theta_2 < 1$$

Untuk fungsi autokorelasi kita lihat sebagai berikut :

$$z_t = a_t - \theta_1\, a_{t-1} - \theta_2\, a_{t-2}$$

$$z_{t-k} = a_{t-k} - \theta_1\, a_{t-k-1} - \theta_2\, a_{t-k-2}$$

$$E[z_t z_{t-k}] = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2})(a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - \theta_2 a_{t-k-2})]$$

untuk $k = 0$

$$E[z_t z_t] = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2})(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2})]$$

$$= E[a_t^2] - \theta_1 E[a_t a_{t-1}] - \theta_2 E[a_t a_{t-2}] - \theta_1 E[a_t a_{t-1}]$$

$$+ \theta_1^2 E[a_{t-1}^2] + \theta_1 E[a_{t-1} a_{t-2}] - \theta_2 E[a_t a_{t-2}]$$

$$+ \theta_1 \theta_2 E[a_{t-1} a_{t-2}] + \theta_2^2 E[a_{t-2}^2]$$

$$= [1 + \theta_1^2 + \theta_2^2] E[a_t^2]$$

$$= [1 + \theta_1^2 + \theta_2] \sigma_a^2$$

Karena $E[z_t z_t] = E[z_t^2]$ merupakan variansi dari z_t dan $\sigma_z^2 = \gamma_o$

maka :

$$\sigma_z^2 = \gamma_o = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\, \sigma_a^2$$

Hal yang serupa kita peroleh untuk $k=1$ dan $k=2$

$$\gamma_1 = (-\theta_1 + \theta_1 \theta_2)\, \sigma_a^2$$

$$\gamma_2 = -\theta_2\, \sigma_a^2$$

tapi untuk $k > 3$ diperoleh :

$$\gamma_k = 0$$

sehingga :

$$\rho_o = 1$$

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

dan $\rho_k = 0$ untuk $k \geqslant 3$

Dari syarat stasioner yang harus dipenuhi oleh θ_1 dan θ_2 dan dari ρ_1, ρ_2 yang merupakan fungsi dari θ_1 dan θ_2 kita peroleh batas-batas ρ_1 dan ρ_2 adalah sebagai berikut :

$$\rho_2 + \rho_1 = -0,5$$

$$\rho_2 - \rho_1 = -0,5$$

$$\rho_1^2 = 4\,\rho_2\,(1 - 2\,\rho_2)$$

Fungsi Autokorelasi Parsil

Pernyataan yang tepat untuk fungsi autokorelasi parsil proses MA(2) adalah rumit, tetapi dia didominasi oleh penjumlahan dari dua eksponensial. Jika akar-akar dari persamaan karakteristiknya adalah riil dan oleh gelombang sinus jika akar-akarnya kompleks. Dia mempunyai kelakuan seperti autokorelasi dari proses AR(2).

10. KESIMPULAN

1. Dengan mempelajari autokorelasi dan autokorelasi parsil dari data time series kita dapat memperkirakan model dari time series.
2. autokorelasi parsil bisa digunakan untuk menentukan orde dari model proses autoregressive.

DAFTAR PUSTAKA

1. D. ANDERSON : "Time Series Analysis and Forecasting"
2. G.E.P. BOX, G.M. JENKINS : "Time Series Analysis, Forecasting and Control"
3. CHARLES R. NELSON : "Applied Time Series Analysis for Managerial"

D I S K U S I

1. MULYANA W.

Tanya : Mohon penjelasan tentang pengertian autokorelasi, fungsi autokorelasi dan fungsi autokorelasi parsil !

Jawab : Autokorelasi parsil, adalah korelasi antara z_t dan z_{t-k} di mana $t = 1, 2, \ldots\ldots, N$ dan k merupakan interval atau log dari z_t ke z_{t-k} yang merupakan bilangan bulat ($k = 1, 2, \ldots\ldots, K$).

Autokorelasi untuk setiap k, kita plot. Jadi untuk k = 1 diperoleh ρ_1 , k = 2 diperoleh ρ_2.
ρ_k yang merupakan fungsi dari k ini disebut fungsi autokorelasi.

Fungsi autokorelasi parsil ϕ_{kk} didefinisikan sebagai :

$$\phi_{kk} = |P_k^*| \,/\, |P_k|$$

di mana P_k adalah matriks autokorelasi $k \times k$ dan P^* adalah P_k yang kolom terakhirnya diganti oleh :

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_k \end{bmatrix}$$

Tanya : - Apakah elemen-elemen matriks korelasi ?
- Matriks korelasi diproyeksikan ke sumbu k, kenapa harus simetris ?

Jawab : - Jika ada N observasi $z_t, z_{t-1}, \ldots\ldots, z_{t-N-1}$ matriks autokorelasi mempunyai elemen-elemen, korelasi-korelasi antara z_t dan z_{t-k}, di mana $k = 1, 2, \ldots\ldots, N-1$. Dan matriks ini simetris dengan diagonal utamanya mempunyai elemen 1.
- Karena matriks autokorelasi simetris, akibatnya bila kita proyeksikan ke sumbu k seperti pada gambar juga simetris.

2. H A B I R U N

Tanya : Kenapa kita menghitung :
- Koefisien korelasi parsil ?
- Sebab apa sehingga muncul korelasi parsil ?

Jawab : - Korelasi parsil sangat berguna untuk menentukan orde dari proses autoregresive.
- Karena dari model autoregresive yang belum kita ketahui berapa ordenya, maka muncul korelasi parsil yang digunakan untuk menentukan ordenya AR.

Tanya : Apa gunanya kita menghitung koefisien korelasi dan apa artinya koefisien korelasi parsil ?

Jawab : Untuk menentukan hubungan antara dua variabel random. Mengenai arti dari koefisien korelasi parsil ini saya belum bisa menjelaskan, tapi marilah kita kembali melihat definisi dari autokorelasi parsil itu sendiri.

Tanya : Apa dasarnya menentukan model yang stasioner ?

Jawab : Untuk dasar model stasioner, lihat lagi definisinya.

Tanya : Mohon ditunjukkan variabel bebas dan variabel tak bebas sehingga terjadi korelasi !

Jawab : Kalau model kita $z_t = \phi_1 z_{t-1} + a_t$, maka variabel bebas adalah z_{t-1} dan variabel tak bebas adalah z_t. Dari sini kita bisa melihat korelasi antara z_t dan z_{t-1}.

Tanya : Jika koefisien korelasi parsil 0,6 apa artinya dan kesimpulan kita bagaimana ?

Jawab : Kalau kita berbicara dalam time series koefisien autokorelasi parsil 0,6 belum bisa menyimpulkan apa-apa. Apalagi kita tahu nilai ini untuk log berapa.

3. BINSAR GULTOM

Tanya : Syarat apa agar ada fungsi autokorelasi dan autokorelasi parsil dalam suatu masalah ?

Jawab : Kalau kita lihat $\rho_k = \dfrac{\gamma_k}{\gamma_o}$, jelas ρ_k ada. apabila $\gamma_o = \sigma_z^2 \neq 0$. Hal ini juga menentukan adanya autokorelasi parsil, karena $\phi_{kk} = |P^*| / |P|$

Tanya : Pada taksiran fungsi autokorelasi dan autokorelasi parsil, yang mana lebih besar errornya ?

Jawab : Dilihat dari :

$$S E [r_k] = \{\frac{1}{N} (1 + 2 \Sigma r_i^2)\}^{\frac{1}{2}}$$

dan $$S E [\phi_{kk}] = \{\frac{1}{N}\}^{\frac{1}{2}}$$

tampaknya
$$S E [r_k] > S E [\phi_{kk}]$$

Tanya : Bagaimana syarat-syaratnya matriks P dan matriks Γ ?

Jawab : Menurut saya tidak ada syarat-syaratnya. Karena kalau ada γ_k tentu ada ρ_k. Sedangkan P merupakan matriks yang unsur-unsurnya adalah ρ_k. Begitu juga dengan yang unsur-unsurnya γ_k, di mana $k = 0, 1, \ldots.., N-1$.

4. S.L. MANURUNG

Tanya : Dengan mengetahui ρ (autokorelasi), suatu fungsi disebut stasioner. Mohon dijelaskan dan kalau ada contoh !

Jawab : Kita tidak mengatakan fungsi stasioner, yang stasioner adalah prosesnya. Bisa dilihat dari definisi mengenai suatu proses stasioner. Tadi sudah dijelaskan bahwa untuk suatu proses yang stasioner kita peroleh syarat yang harus dipenuhi oleh fungsi autokorelasi ρ_k. jadi kalau ρ_k $(k = 1, 2, .., K)$ kita peroleh maka kita dapat melihat apakah ρ_k tersebut memenuhi syarat-syarat stasioner.

Tanya : Apabila pengamatan yang dilakukan menghasilkan data analog, bisakah uraian yang telah dibicarakan untuk menentukan, nilai ekspektasi dan variansi dan lain-lain

Jawab : Untuk data analog, uraian ini tidak bisa kita gunakan.

5. SRI KALOKA

Tanya : Mohon penjelasan, bagaimana menentukan parameter-parameter ϕ_1, ϕ_2, ..., dan seterusnya !

Jawab : Menaksir parameter $\phi_1, \phi_2, \ldots\ldots, \phi_K$, dapat digunakan metoda Least Square. Atau juga cari dulu ρ_k, selanjutnya gunakan persamaan Yule-Walker.

Tanya : Berapa data yang harus diperlukan untuk menentukan z_t ?

Jawab : Dalam literatur dikatakan observasi harus lebih besar dari 50.

- - - ooOoo - - -