ANALISA KONTROLABILITAS UNTUK SISTEM NONLINIER

oleh :
Rika Andiarti*

Abstrak

Dalam tulisan ini, sebuah metoda analisa kontrolabilitas untuk sistem nonlinier dikembangkan. Metoda ini didasarkan pada ide (notion) "invariant subspaces" yang memainkan peran dual "invariant distributions". Keefektifan metoda ini dibuktikan dengan simulasi transfer orbit sebuah pesawat ruang angkasa.

1. PENDAHULUAN

Dalam rangka penguasaan teknologi, khususnya teknologi ruang angkasa, penelitian sistem kendali merupakan suatu hal yang sangat penting. Sistem kendali ini meliputi sistem kendali roket, satelit ataupun kendali pesawat ruang angkasa. Performansi dan kekokohan sistem kendali ini sangat tergantung dari strategi kendali yang dipilih.

Untuk sistem kendali roket, yang saat ini tengah dikembangkan LAPAN, strategi kendali bisa ditentukan setelah kita berhasil melakukan analisa stabilitas, analisa kontrolabilitas, perhitungan karakteristik aerodinamika dan perhitungan trayektori. Dalam tulisan ini kita mempelajari suatu metoda analisa kontrolabilitas. Analisa ini penting dilakukan untuk menentukan daerah-daerah terbang dimana piranti pengendalian masih cukup efektif.

Sepengetahuan kami, metoda analisa kontrolabilitas yang akan dipaparkan dalam tulisan ini belum pernah dikembangkan sebelumnya. Kami tertarik mengembangkannya setelah kami berhasil mendefinisikan apa yang disebut dengan "autonomous subspaces" (ruang bagian autonom) dan "invariant subspaces" (ruang bagian invarian) (lihat *Huijberts et. al.*). Ide "invariance" sendiri sudah dikenal sejak lama, berkat kemampuannya dalam menyelesaikan masalah-masalah kontrol baik untuk sistem linier maupun nonlinier, seperti: input-output decoupling, disturbance decoupling dan observer synthesis (lihat *Basile dan Marro, Wonham, Isidori, Nijmeijer dan van der Schaft*). Namun, penggunaan "invariance" untuk analisa kontrolabilitas baru pertama kali ini dikembangkan. Meskipun demikian, *Scherpen* dalam tulisannya, secara tidak langsung memberikan juga metoda alternatif untuk mengecek kekontrolabilitasan suatu sistem.

Tulisan ini akan dibagi dalam beberapa bagian. Pada paragrap 2 akan diperlihatkan bentuk sistem yang dipelajari berikut notasi-notasi matematika yang akan dipakai. Selanjutnya bagian 3 membahas tentang "autonomous subspaces", yang diteruskan dengan formalisasi pengenalan keotonoman sebuah subspace. Pada bagian 4, definisi "invariant

* Staf Peneliti Bidang Kendali Roket dan Satelit LAPAN - Rumpin.

subspace" akan diketengahkan, sekaligus cara pengenalannya. Semua ini pada akhirnya akan memberikan suatu cara bagaimana "mengukur" kontrolabilitas sebuah subspace. Dan jika kita anggap subspace tersebuat adalah sebuah space secara keseluruhan, maka metoda ini bisa berfungsi untuk mengukur kontrolabilitas suatu sistem. Untuk membuktikan keefektifan metoda analisa ini, pada paragrap 6, kita memilih sebuah model spacecraft yang melakukan transfer orbit dari orbit tinggi ke orbit rendah melalui atmosfir. Karena model matematika spacecraft ini hampir sama dengan model roket yang dimiliki LAPAN, maka jika informasi trayektorinya cukup lengkap, metoda ini akan dapat dipakai untuk menganalisa kekontrolabilitasan roket tersebut.

2. SISTEM YANG DIPELAJARI

Seperti diketahui, sebelum kita menyelesaikan suatu masalah kendali, terlebih dahulu penting dilakukan suatu analisa minimal tentang sistem yang kita pelajari, terutama masalah krusial tentang kontrolabilitas. Karena, untuk sistem nonlinier, meskipun kondisi "strong accessibility" telah dipenuhi, belum tentu titik akhir (final point) bisa dicapai.

Untuk memformulasikan suatu metoda analisa kontrolabilitas, kita akan menggunakan ide "invariance" yang telah didefinisikan di [*Huijberts et. al.*]. Sebelumnya, marilah kita lihat bentuk sistem nonlinier yang akan dipelajari. Bentuknya adalah seperti berikut:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{1}$$

dimana $x \in R^n$, $u \in R^m$. Fungsi *f(x)* dan *g(x)* adalah fungsi meromorfik dari R^n ke *R*. Fungsi meromorfik adalah fungsi yang dapat dinyatakan sebagai pembagian dari dua fungsi analitik. Hipotesa ini dibuat agar kita bisa menurunkan karakteristik sistem (1) dalam sebuah open dan dense subset dari state space.

Dalam tulisan ini kita akan mengikuti notasi dan istilah yang terdapat di [*Di benedetto et. al.*]. Tuliskan *K*, field fungsi meromorfik dari $\{x, u^{(k)} | k \geq 0\}$, sedangkan *E* adalah formal vector space yang dibentuk oleh $\{d\eta | \eta \in K\}$ di atas *K*. Kita akan menuliskan dx untuk $\{dx_1, dx_2, \ldots, dx_n\}$ dan $du^{(k)}$ untuk $\{du_1^{(k)}, \ldots, du_m^{(k)}\}$. Sedangkan $X = \mathrm{span}_K\{dx\}$ dan $U = \mathrm{span}_K\left\{du, d\dot{u}, \ldots, du^{(k)} | k \geq 0\right\}$.

Kita misalkan sekarang sebuah subspace $\Omega \subset X$. Definisikan $\dot{\Omega}$ sebagai berikut:

$$\dot{\Omega} = \mathrm{span}_K\left\{\dot{\omega} | \omega \in \Omega\right\}$$

dimana $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)}) dx_i$ dan derivasi terhadap waktu didefinisikan oleh

$\dot{\ } = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i d\dot{x}_i + \dot{\omega}_i dx_i)$. Dengan demikian, $\dot{\ } \in \mathrm{span}_K\{dx, du\}$.

3. AUTONOMOUS SUBSPACES

Pada bagian ini kita akan melihat definisi dari autonomous subspace untuk sistem (1) dan cara pengenalannya secara numerik.

3.1 Definisi

Definisi 1: Sebuah subspace $\Omega \subset X$ bisa dikatakan autonom terhadap sistem (1) jika

$$\dot{\Omega} \subset \Omega \tag{2}$$

Di sini jelas bisa dilihat bahwa Ω uncontrollable, karena tidak ada satupun aksi dari control input u. Untuk lebih bisa dimengerti definisi di atas, marilah kita lihat contoh berikut ini.

Contoh: Misalkan sebuah sistem nonlinier dalam bentuk

$$\dot{x}_1 = x_1 x_3 + u$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

$$\dot{x}_3 = x_2$$

Jika kita anggap $\Omega = \mathrm{span}_K\{dx_2, dx_3\}$, maka $\dot{\Omega} = \mathrm{span}_K\{dx_2\}$, dan $\dot{\Omega} \subset \Omega$. Dengan demikian Ω adalah sebuah autonomous subspace menurut Definisi 1.

3.2. Pengenalan secara numerik

Untuk mengenal autonomi dari sebuah subspace secara numerik, kita akan menggunakan metoda seperti di bawah ini, yang mana perhitungan matriks akan digunakan.

Pertama-tama kita tuliskan q=dim Ω, dan $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q\}$ basis Ω, dengan

$$_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(x,u,\ldots,u^{(r)})dx_j, 1 \le i \le q$$

Dengan menganggap Ω sebagai sebuah vectoriel subspace diatas K dari $X + \mathrm{span}_K\{du\}$, Ω bisa ditulis seperti

$$\Omega = \mathrm{rowspan}_K\begin{pmatrix} A(x,u,\ldots,u^{(r)}) & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

dimana $A(x,u,\ldots,u^{(r)})$ adalah sebuah matriks dengan elemen-elemennya $_{ij}(i = 1,\ldots q; j = 1,\ldots,n)$. Notasi rowspan($A$) artinya sebuah ruang (space) dengan elemennya adalah vektor baris dari matriks A.

Dengan cara yang sama, kita bisa menuliskan

$$\Omega + \dot{\Omega} = \mathrm{rowspan}_K\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & Ag \end{pmatrix} \tag{4}$$

dengan $B = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial x_i}\dot{x}_i + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial A}{\partial u_j^{(k)}} u_j^{(k+1)} + A\left(f_x(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} u\right)$

dimana f_x adalah jacobien dari f.
Dengan penulisan seperti di atas, kita dapat memeriksa apakah sebuah subspace $\Omega \subset X$ autonom atau tidak. Untuk keperluan tersebut, kita cukup memeriksa apakah

$$\text{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & Ag \end{bmatrix} = \text{rank}[A] \tag{5}$$

Jika kondisi (5) terpenuhi, itu artinya matriks Ag adalah matriks nol dan $\Omega + \dot{\Omega} =$.
Dengan demikian, jelas bahwa $\dot{\Omega} \subset \Omega$.

4. INVARIANT SUBSPACES

4.1 Definisi

Sekarang marilah kita tuliskan kembali definisi dari invariant subspace yang terdapat dalam [*Huijberts et. al.*].

Definisi 2: Sebuah subspace $\Omega \subset X$ dikatakan invarian terhadap sistem (1), jika

$$\dot{\Omega} \subset \Omega + \text{span}_K\{du\} \tag{6}$$

Dari definisi ini kita bisa mengerti bahwa sebuah invariant subspace adalah sebuah subspace yang bila diderivasikan terhadap waktu komponen X nya tetap tinggal dalam subspace tersebut. Untuk lebih jelasnya, mari kita lihat contoh di bawah ini.

Contoh: Kita misalkan sebuah sistem nonlinier order 3 dalam bentuk

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2$$

$$\dot{x}_2 = u$$

$$\dot{x}_3 = x_2$$

Jika $\Omega = \text{span}_K\{dx_1, dx_2\}$, maka $\dot{\Omega} = span_K\{d(x_1 x_2), du\}$. Di sini jelas bahwa $\dot{\Omega} \subset \Omega + \text{span}_K\{du\}$. Jadi Ω adalah sebuah invariant subspace.

Definisi invariant subspace di atas sesuai benar dengan definisi *invariant codistribution* yang telah dikenal (*Isidori, Nijmeijer dan van der Schaft*). Jadi, jika Δ sebuah invariant distribution involutif, maka orthogonal Δ adalah invariant subspace.

4.2 Pemeriksaan secara numerik

Untuk memeriksa secara numerik apakah sebuah subspace $\Omega \subset X$ invarian atau tidak, kita bisa menggunakan cara yang hampir sama dengan yang telah dibahas untuk autonomous subspace. Jadi kita masih tetap akan menggunakan rang dari suatu matriks. Untuk itu, cukup kita periksa apakah

$$\text{rank}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \text{rank}[A] \qquad (7)$$

Jika kondisi (7) terpenuhi, maka dengan mudah dapat dilihat bahwa

$\Omega + \dot{\Omega} \subset \Omega + \text{span}_K\{du\}$. Dengan demikian, $\dot{\Omega} \subset \Omega + \text{span}_K\{du\}$

Jadi kondisi (7) merupakan kondisi yang cukup (sufficient condition) untuk memeriksa secara numerik invarian dari sebuah subspace tertentu $\Omega \subset X$.

Sekarang yang lebih menarik adalah bagaimana "mengukur" kontrolabilitas dari sebuah invariant subspace. Pertanyaan ini akan dijawab pada paragrap berikut.

5. ANALISA KONTROLABILITAS

Pada bagian ini, kita akan mempelajari kontrolabilitas dari sebuah invariant subspace. Jika kontrolabilitasnya rendah, maka invariant subspace tersebut dikatakan hampir autonom atau dengan kata lain hampir uncontrollable. Fenomena ini cukup menarik untuk diformalisir, karena dalam prakteknya, mampu untuk mengkarakterisir kontrolabilitas dari state space X (karena state space X adalah sebuah invariant space secara automatis). Dengan begitu akan mampu mengenal kontrolabilitas secara lokal dari sistem keseluruhan. Untuk itu, marilah kita lihat sebelumnya definisi rang numerik dari sebuah matriks yang akan digunakan kemudian.

5.1. Rang numerik

Definisi 3 [Godbole dan Sastry]: Sebuah matriks $M \in R^{nxn}$ *dikatakan mempunyai rang numerik sama dengan r, ditulis* $\text{rank}_\varepsilon = r$, *terhadap ε, jika*

$$\min \text{rank}\{N : \|N - M\| \prec \varepsilon\} = r \qquad (8)$$

Dalam prakteknya, kita bisa melihat rang numerik ini dengan menggunakan singgular value dari matriks. Jika $(n\text{-}r)$ singgular value dari matriks M lebih kecil dari ε, maka rang numeriknya sama dengan r. Selanjutnya definisi rang numerik ini akan dipakai untuk melihat secara numerik kontrolabilitas dari sebuah invariant subspace $\Omega \subset X$.

5.2. Mengukur kontrolabilitas

Misalkan sebuah invariant subspace $\Omega \subset X$. Kita akan mengevaluasi kontrolabilitas Ω pada suatu titik yang telah ditentukan $(x_0, u_0, \ldots, u_0^{(s)}, s \geq 0)$.

Kita tuliskan kembali Ω dan $\Omega + \dot{\Omega}$

$$\Omega = \text{rowspan}_K\begin{pmatrix} A(x,u,\ldots,u^{(r)}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega + \dot{\Omega} = \text{rowspan}_K\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & Ag \end{pmatrix}$$

Sebelumnya akan kita cari sebuah $\varepsilon_{max} \succ 0$ dimana

$$\text{rank}_{\varepsilon_{max}}[A] = \text{rank}[A]$$

ε_{max} ini bisa kita dapatkan dengan mengetahui singular value yang paling kecil dari A. Jadi, sebuah invariant subspace Ω dikatakan hampir autonom untuk $\varepsilon \prec \varepsilon_{max}$ jika

$$\text{rank}_{\varepsilon}\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & Ag \end{bmatrix} = \text{rank}[A] \tag{9}$$

Persamaan (8) menunjukan bahwa $\Omega + \dot{\Omega}$ secara aproximatif termasuk dalam Ω. Dengan begitu, $\dot{\Omega} \subset \Omega$ dan Ω hampir autonom (uncontrollable). Kita katakan bahwa Ω autonom untuk sebuah ε kecil. Jika kontrol u pengaruhnya kuat terhadap Ω, maka harga ε yang dapat menyebabkan Ω autonom cukup besar. Semua ini dapat mengkuantitasi secara lokal kontrolabilitas dari sebuah subspace. Dengan demikian dapat juga menganalisa kontrolabilitas dari sebuah sistem secara keseluruhan.

Pendekatan lainnya untuk menganalisa kontrolabilitas dari suatu sistem diberikan dalam [*Scherpen*], di mana didalamnya analisa observabilitas di bahas juga. Prinsipnya didasarkan pada input energy, di mana kemudian sebuah fungsi kontrolabilitas dibentuk. Dengan menggunakan transformasi keadaan (state transformation), sistem yang dipelajari diubah bentuknya ke dalam *balanced form*. Dalam bentuk ini, fungsi kontrolabilitas mengekspresikan fungsi-fungsi singular value. Jika fungsi singular value nilainya kecil, maka komponen state yang bersangkutan lemah sekali kontrolabilitasnya.

6. CONTOH SIMULASI

Paragrap ini dimaksudkan untuk memberikan gambaran bahwa teori yang telah dibahas terdahulu sangat mudah diterapkan. Kita mengambil contoh sebuah pesawat ruang angkasa (spacecraft) yang melakukan transfer orbit melalui atmosfir. Kita akan membatasi diri dengan mempelajari kontrolabilitas spacecraft tersebut sewaktu terbang melewati atmosfir. Adapun persamaan pusat masanya adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= V \sin\gamma \\
\dot{\tau} &= V \cos\gamma \cos\chi / (r\cos\delta) \\
\dot{\delta} &= V \cos\gamma \sin\chi / r \\
\dot{\chi} &= -\frac{L\sin\sigma}{mV\cos\gamma} - \frac{V}{r}\cos\gamma\cos\chi\tan\delta - 2\omega(\sin\delta - \tan\gamma\cos\delta\sin\chi) \\
&\quad - \frac{\omega^2 r}{V\cos\gamma}\sin\delta\cos\delta\cos\chi \\
\dot{V} &= \frac{D}{m} - \frac{\mu}{r^2}\sin\gamma + \omega^2 r\cos\delta(\sin\gamma\cos\delta - \cos\gamma\sin\delta\sin\chi) \\
\dot{\gamma} &= -\frac{L\cos\sigma}{mV} + \left[\frac{V}{r} - \frac{\mu}{r^2 V}\right]\cos\gamma + \frac{\omega^2 r}{V}\cos\delta(\cos\gamma\cos\delta + \sin\gamma\sin\delta\sin\chi)
\end{aligned} \tag{10}$$

Dimana D dan L adalah gaya drag dan lift, r jarak dari pusat bumi, δ adalah latitude, τ longitude, V adalah kecepatan, γ adalah sudut terbang, χ heading angle, m masa pesawat, σ bank angle, ω kecepatan angular bumi dan μ konstanta gravitational bumi.

Hasil simulasi :
Dengan menggunakan software MATLAB, kita terapkan metoda analisa kontrolabilitas yang telah dibahas di paragrap 5 ke dalam model spacecraft (9), dengan

$$\Omega = X = \mathrm{span}_K\{dr, d\tau, d\delta, d\chi, dV, d\gamma\}$$ dan input control $u=\sigma$.

Untuk setiap posisi pesawat (sepanjang trayektori), kita cari sebuah nilai ε yang menyebabkan sistem menjadi autonom. Hasil simulasi memberikan tiga zona ketinggian untuk nilai ε yang berbeda-beda.

Zona	$120km \geq h \succ 100km$	$100km \geq h \succ 90km$	$h \leq 90km$
ε	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}

Disini jelas, bahwa harga ε naik sewaktu kita berada pada lapisan bawah atmosfir. Ini berarti bahwa sistem lebih sensitif terhadap aksi dari kontrol. Jadi bisa kita simpulkan bahwa dilapisan bawah atmosfir, kontrolabilitas dari spacecraft 100 kali "lebih besar" dari lapisan atas. Hal ini dikarenakan rapat udara (densitas atmosferik) di lapisan bawah lebih besar daripada di lapisan atas. Hasil ini cukup koheren dengan hasil yang didapat dari simulasi kontrol optimal untuk misi yang sama (*Andiarti et. al.*), dimana konvergensi algoritma optimasi lebih baik sewaktu kontrol optimal hanya diaplikasikan di lapisan bawah atmosfir.

6. KESIMPULAN

Ide "invariance" terbukti dapat memberikan suatu metoda analisa kontrolabilitas untuk sistem nonlinier. Metoda ini bisa dengan mudah diaplikasikan dan disimulasikan dengan hanya menggunakan perhitungan-perhitungan matriks. Keefektifan metoda ini bisa dilihat ketika kita menerapkannya ke dalam problem terbang atmosferik sebuah spacecraft.

Dikarenakan persamaan matematika spacecraft ini hampir mirip dengan persamaan gerak roket yang dimiliki LAPAN, maka dengan cara yang hampir sama, kita bisa melakukan analisa kontrolabilitas terhadap roket tersebut. Tentu saja jika semua informasi tentang trayektorinya cukup lengkap.

Referensi

- Huijberts, H.J.C., C.H. Moog dan R. Andiarti, *Generalized Controlled Invariance for Nonlinear Systems*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 35, No. 3, 1997, pp. 953-979.
- G. Basile dan G. Marro, *Controlled and conditioned invariants in linear system theory*, New Jersey, Prentice Hall, 1992.

- W.M. Wonham, *Linear multivariable control: a geometric approach* (3rd Edition), Springer Verlag, Berlin, 1985.
- A. Isidori, *Nonlinear control systems* (2nd Edition), Springer Verlag, Berlin, 1989.
- H. Nijmeijer dan A.J. van der Schaft, *Nonlinear dynamical control systems*, Springer Verlag, New York, 1990.
- Scherpen, J.M.A., *Balancing for Nonlinear Systems*, System and Control Letters, Vol. 21, 1993, pp. 143-153.
- Di Benedetto, M.D., J.W. Grizzle dan C.H. Moog, *Rank Invariants of Nonlinear Systems*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 27, 1989, pp. 658-672.
- Andiarti, R., C.H. moog dan J. Szymanowski, *Controllability and Optimization in Aeroassisted Orbital Transfer*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 18, No. 4, 1995, pp. 911-913.
- D.N. Godbole dan S.S. Sastry, *Approximate decoupling and asymptotic tracking for MIMO systems*, Memorandum No. UCB/ERL M93/9, Electronics Research Laboratory, Univ. Of California, Berkeley, 1993.