

SIMULASI MATEMATIS OPTIMALISASI KOMPOSISI PROPORSI PORTOFOLIO SAHAM MENGGUNAKAN METODA OPTIMALITY LAGRANGE MULTIPLIER

Jarot Prasetyo¹, Anis Marjukah², Abdul Hadi³

¹ Fakultas Ekonomi, Universitas Widya Dharma

jarotprasetyopakje@gmail.com

² Fakultas Ekonomi, Universitas Widya Dharma

Anismarjukah69@gmail.com

³ Fakultas Ekonomi, Universitas Widya Dharma

abdulhadi@gmail.com

Article Info

ARTICLE HISTORY

Received:

23/12/2021

Reviewed:

30/12/2021

Revised:

13/01/2022

Accepted:

16/01/2022

DOI: 10.54840/wijob.v1i1.28.

Abstract

This study aims to determine the composition of the proportion of funds (W) that should be invested in a stock portfolio. The method of determining it is using a simulation called the Optimization of the Optimization of the Share Portfolio Proportion Composition Using the Lagrange Multiplier Optimality Method. In this way it is expected that the proportion of funds provided by potential investors will be optimal so that the portfolios that are formed will be efficient, that is, at a certain level of risk, the portfolio will provide the maximum expected return; or at a certain level of expected return will result in minimal portfolio risk.

Through this simulation, several equations of the proportion of funds for each portfolio forming share will be generated. If the value of the expected return of each share is included in these equations, the proportion of funds generated will be optimal.

Using the stock data included in the LQ45 index of 15 types of stocks, the simulation produces an equation of the proportion for each type of stock at level E (Rp) of 0.014806, so a portfolio risk will be obtained of 6.50521E-17. This level of risk is much lower when compared to portfolio risk before using the ideal proportion, which is 0.00028591

Keywords : stock portfolio, expected results, stock portfolio risk, Lagrange Multiplier Optimality

PENDAHULUAN

Berinvestasi pada saham yang diperjualbelikan di pasar modal, seorang investor dituntut memiliki pengetahuan mendalam mengenai berbagai karakteristik saham yang menjadi target investasinya. Di antaranya adalah tingkat keuntungan yang diharapkan (*expected rate of return*) dan risiko saham. Namun, pada suatu saat harapan tentang nilai masa depan saham yang diramalkan ternyata dapat berbeda dari keinginan, yang antara lain bisa disebabkan oleh faktor ketidakpastian masa depan, terbatasnya pengetahuan analisis investor, atau informasi yang kurang memadai. Maka hal-hal inilah yang sering menimbulkan risiko investasi pada saham.

Untuk memperkecil risiko ini, investor dapat melakukan diversifikasi, yaitu memecah investasinya pada berbagai elemen investasi dan membentuk portofolio. Melalui diversifikasi, kerugian yang ditimbulkan oleh salah satu komponen investasi akan dikompensasi oleh keuntungan

komponen investasi lainnya. Jika diversifikasi dilakukan dengan tepat, investor akan menghasilkan portofolio efisien, yaitu portofolio yang mampu menghasilkan keuntungan yang diharapkan (*expected rate of return*) pada tingkat tertentu dengan risiko minimum; atau portofolio yang menghasilkan *expected return* maksimum pada tingkat risiko tertentu.

Pada saat melakukan diversifikasi, calon investor dihadapkan pada beberapa permasalahan, salah satunya adalah penentuan berapa masing-masing dana (proporsi) yang seharusnya dialokasikan ke setiap jenis saham. Secara teoritis kombinasi proporsi dana ini akan menentukan tinggi rendahnya keuntungan yang diharapkan (*expected rate of return*). Sehingga jika ditentukan secara sembarangan, tujuan calon investor mencapai portofolio yang efisien tidak akan tercapai.

Dengan demikian salah satu permasalahan pada saat pembentukan portofolio efisien adalah bagaimana menyusun alokasi (dana) investasi tersebut dalam komposisi optimal, yaitu membagikan dana investasi pada berbagai jenis komponen investasi dalam proporsi tertentu, sebatas dana yang ada, sehingga portofolio yang terbentuk adalah portofolio efisien.

Untuk itu, penelitian ini akan melakukan suatu usulan skenario atau simulasi matematis proses pencarian komposisi optimal dana investasi (proporsi investasi) yang harus dibagikan kepada berbagai jenis komponen investasi agar portofolio efisien tercapai. Model matematis yang diajukan adalah metode *optimality lagrange multiplier*, suatu konsep matematika tentang optimalisasi fungsi tujuan yang menghadapi kendala (*constraint*).

Permasalahan

Bagaimana menyusun alokasi (dana) investasi tersebut dalam komposisi optimal, yaitu membagikan dana investasi pada berbagai jenis komponen investasi dalam proporsi tertentu, sebatas total dana yang ada yang dimiliki calon investor, sehingga portofolio yang terbentuk adalah portofolio efisien. Cara yang disarankan adalah melakukan simulasi matematis proses pencarian komposisi optimal dana investasi (proporsi investasi) yang harus dibagikan kepada berbagai jenis komponen investasi agar portofolio efisien tercapai. Model matematis yang diajukan adalah metode *optimality lagrange multiplier*, suatu konsep matematika tentang optimalisasi fungsi tujuan yang menghadapi kendala (*constraint*).

Tujuan Penelitian

Sesuai dengan permasalahan yang ada, maka tujuan penelitian ini ialah:

Mencari komposisi proporsi dana investasi yang harus diinvestasikan kepada setiap jenis saham dalam portofolio yang dibentuk calon investor, agar portofolio efisien tercapai. Pembentukan komposisi dana tersebut menggunakan skenario atau simulasi menggunakan model matematis, yaitu metode *optimality lagrange multiplier*, suatu konsep matematika tentang optimalisasi fungsi tujuan yang menghadapi kendala (*constraint*).

Manfaat Penelitian

Perwujudan prinsip portofolio dan diversifikasi tersebut menyarankan kepada investor suatu keharusan pemahaman yang mendalam tentang berbagai jenis kombinasi proporsi dana yang ditanamkan pada berbagai jenis saham yang paling efisien. Investor harus mampu membagi dan memecah dana investasi pada berbagai jenis saham biasa yang diterbitkan oleh berbagai perusahaan agar portofolio yang dibentuknya mampu menghasilkan sekumpulan investasi yang paling efisien.

Dengan demikian dari seluruh uraian tersebut kiranya dapat diketahui betapa pentingnya pengetahuan tentang peranan kombinasi yang efisien dari proporsi dana yang ditanamkan pada berbagai jenis saham biasa. Itu berarti proporsi jumlah masing-masing dana pada masing-masing jenis saham harus diukur sedemikian rupa agar kombinasinya menghasilkan gabungan elemen-elemen investasi portofolio yang efisien.

TINJAUAN PUSTAKA

Portofolio Efisien

Berdasarkan perilaku investor terhadap risiko kita dapat membuat suatu hubungan keseimbangan antara risiko suatu investasi dengan keuntungan yang diharapkan. Semakin tinggi risiko investasi yang dihadapi investor semakin tinggi pula keuntungan yang harus ia peroleh dari investasinya untuk mengimbangi risiko tersebut.

Pendek kata, investasi mempunyai tujuan: memaksimalkan keuntungan dan sebaliknya meminimumkan risiko. Karenanya investor harus bertindak efisien. Kata efisien berarti menghasilkan sesuatu yang diinginkan dengan penyimpangan hasil yang minimum (Francis, 1986).

Sesuatu yang diinginkan investor adalah keuntungan yang diharapkan (*the expected rate of return*) dan pemborosan yang dihindari adalah adanya penyebaran (penyimpangan) tingkat *return* realisasi terhadap tingkat *return* yang diharapkan, maka investor harus berusaha memperkecil penyimpangan hasil investasinya. Karena itulah manajer portofolio dalam mencari investasi yang efisien membutuhkan dua data statistik: tingkat keuntungan yang diharapkan (*expected return*) dan statistik risiko (*risk statistics*).

Keuntungan yang diharapkan dan risiko dari surat berharga (saham) secara individual merupakan input data yang dianalisis dalam kerangka mengembangkan portofolio efisien yang menghasilkan tingkat *return* maksimum yang diharapkan diperoleh pada tingkat risiko berapapun yang dianggap layak. Portofolio itu sendiri diartikan sebagai sekumpulan berbagai kesempatan investasi pada saham atau aset lainnya.

Pada saat manajer portofolio dihadapkan kepada statistik keuntungan yang diharapkan dan risiko dari sekian ratus jenis surat berharga (saham) yang berbeda, dia harus memilih investasinya menggunakan prinsip *the dominance principle* yang menyatakan (Francis, 1986):

1. Di antara keseluruhan investasi yang menghasilkan tingkat keuntungan tertentu, investasi yang mengandung risiko terkecil merupakan investasi yang paling diinginkan.
2. Diantara seluruh aset investasi yang mengandung risiko tertentu, investasi yang menghasilkan tingkat keuntungan tertinggi merupakan investasi yang paling diinginkan.

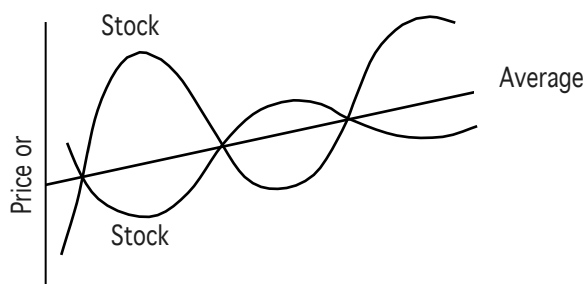
Prinsip tersebut menunjukkan kepada kita bahwa elemen-elemen investasi yang dominan harus dibentuk sebagai portofolio dan hal tersebut dikenal sebagai portofolio yang efisien, dimana portofolio tersebut dapat terdiri dari satu atau lebih elemen investasi. Karenanya, sebuah portofolio efisien terdiri dari kombinasi elemen-elemen investasi yang memiliki: 1) tingkat keuntungan yang diharapkan maksimum pada tingkat risiko tertentu, atau 2) memiliki tingkat risiko minimum pada tingkat tertentu tingkat keuntungan yang diharapkan (Francis, 1986).

Diversifikasi

Tujuan pengelolaan portofolio efisien adalah mengembangkan portofolio yang efisien dengan cara menanamkan dana pada berbagai jenis instrumen investasi yang secara keseluruhan maupun individual akan mampu meminimumkan risiko dan memaksimalkan *return* yang diharapkan. Hal ini disebut sebagai *diversifikasi*, yang seperti dikatakan Benton E. Gup (1986) sebagai memecah atau membagi risiko investasi dengan cara menanamkan dana kita pada berbagai jenis investasi di berbagai perusahaan, industri, surat berharga, atau pada bentuk-bentuk investasi lain. Diversifikasi merupakan hal yang penting dalam menciptakan investasi efisien karena diversifikasi mengurangi penyimpangan hasil investasi (Francis, 1986).

Surat berharga dari berbagai perusahaan dipengaruhi secara berbeda oleh perubahan ekonomi dan kondisi pasar modal. Kalau salah satu elemen investasi merugi sedangkan elemen lain meraih keuntungan, maka kerugian dan keuntungan ini akan saling mengkompensasi. Dengan cara diversifikasi, fluktuasi pendapatan investor tidak akan begitu tajam. Jadi, pada dasarnya prinsip diversifikasi adalah untuk mengurangi risiko investasi portofolio, dengan memecah dana investasi pada berbagai jenis surat berharga dari berbagai perusahaan yang *rate of return*-nya dipengaruhi secara berbeda oleh perubahan ekonomi dan kondisi pasar. Gambar berikut menggambarkan prinsip diversifikasi.

Pada saat harga atau *return* saham E naik, harga saham F turun. Pada saat harga saham E turun, F naik. Kenyataan adanya kenaikan dan penurunan harga saham-saham tersebut, cenderung mengurangi risiko portofolio yang terdiri dari saham-saham tersebut.



Gambar 1. Prinsip Diversifikasi

Investor dapat melakukan diversifikasi dengan beberapa cara, seperti misal dengan membentuk portofolio berisi banyak aktiva, membentuk portofolio secara random, atau diversifikasi secara Markowitz. Diversifikasi dengan banyak aktiva berarti membentuk portofolio yang berisi sebanyak-banyaknya aktiva (elemen) pembentuk portofolio tersebut. Semakin banyak sekuritas yang dimasukkan ke dalam portofolio, semakin kecil risiko portofolio. Cara ini mengikuti hukum statistik bahwa semakin besar ukuran sampel, semakin dekat nilai rata-rata sampel dengan nilai ekspektasi dari populasi. Hukum ini disebut sebagai Hukum Jumlah Besar (*Law of Large Numbers*). Asumsi yang digunakan disini adalah bahwa tingkat hasil (*rate of return*) untuk masing-masing sekuritas secara statistik adalah independen. Ini berarti bahwa *rate of return* untuk satu sekuritas tidak terpengaruh oleh *rate of return* sekuritas lainnya. Kenyataannya, asumsi *rate of return* kurang realistis, karena umumnya *return* sekuritas berkorelasi satu dengan lainnya.

Diversifikasi secara random (*random* atau *naive diversification*) merupakan pembentukan portofolio dengan memilih sekuritas-sekuritas secara acak tanpa memperhatikan karakteristik dari investasi yang relevan seperti misalnya *return* dari sekuritas itu sendiri. Efek pemilihan sekuritas secara acak terhadap risiko portofolio diteliti oleh Fama (1976). Hasilnya menunjukkan bahwa diversifikasi optimal dapat dicapai hanya jika jumlah sekuritas yang membentuk portofolio tersebut tidak terlalu banyak, yaitu jika kurang dari 15 jenis sekuritas.

Diversifikasi berikutnya merupakan diversifikasi yang dalam prosesnya tidak hanya memperhitungkan dua parameter sekuritas, yaitu tingkat keuntungan yang diharapkan dan risiko setiap sekuritas, tetapi juga memperhitungkan korelasi yang terjadi diantara sekuritas-sekuritas pembentuk portofolio tersebut. Semakin kecil korelasi setiap sekuritas, akan semakin memperkecil risiko portofolio. Diversifikasi ini disebut sebagai diversifikasi Markowitz.

Harry M. Markowitz (1952) mempopulerkan konsep risiko dan *return* dalam model yang disebut *two-parameter model*, yang intinya mengatakan bahwa investor seharusnya memfokuskan perhatiannya pada dua parameter: 1) *return* atau tingkat keuntungan yang diharapkan dari suatu aset, dan 2) risiko yang dilihat dari standar deviasi *return* aset tersebut. Konsep tersebut menjadi tulang punggung teori investasi dan teori keuangan. Karena itu ia dikenal sebagai bapak teori portofolio. Dan karena jasanya itu, ia memperoleh hadiah Nobel bidang ekonomi tahun 1990.

Proporsi dana portofolio

Disamping itu diversifikasi Markowitz juga memperhitungkan komposisi porsi dana yang dialokasikan terhadap setiap elemen portofolio karena fungsi persamaan tingkat keuntungan yang diharapkan/ekspektasi dan risiko portofolio merupakan fungsi porsi dana yang dialokasikan terhadap setiap elemen portofolio dan tingkat keuntungan yang diharapkan dari setiap sekuritas pembentuk portofolio. *Return* ekspektasi/yang diharapkan portofolio adalah rerata tertimbang dari *return*-*return* ekspektasi tiap-tiap elemen (saham) pembentuk portofolio. Rumus untuk menghitung *return* ekspektasi portofolio adalah sebagai berikut:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot E(R_i) \quad \dots\dots\dots (1)$$

Rumus tersebut menunjukkan bahwa data yang dibutuhkan untuk mencari *return* ekspektasi portofolio adalah porsi (bobot) tiap elemen (saham) ke-*i* terhadap seluruh elemen dalam portofolio (), misal dana yang diinvestasikan pada saham ke-*i*, dengan syarat jumlah total proporsi ini sama dengan 1 ω_i (satu), dan proporsi setiap elemennya tidak boleh negatif. Sehingga:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \quad ; \quad \omega_i \geq 0 \dots\dots\dots (2)$$

Disamping itu, data lainnya yang dibutuhkan adalah *return* ekspektasi setiap elemen (saham) portofolionya, \bar{R}_i . Risiko portofolio didefinisikan sebagai varian dari *return* elemen-elemen (saham) pembentuk portofolio tersebut. Pengembangan konsep tersebut menghasilkan suatu rumus risiko portofolio yang merupakan penjumlahan varian dan kovarian sesuai dengan proporsi masing-masing elemen portofolionya, seperti yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij}$$

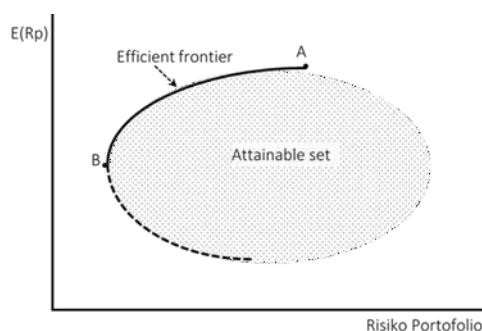
Rumus tersebut dapat dijabarkan menjadi:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij}$$

dimana:

- σ_p^2 = risiko portofolio (varians tingkat keuntungan portofolio)
- ω_i = proporsi dana yang diinvestasikan dalam elemen portofolio ke-*i*
- ω_j = proporsi dana yang diinvestasikan dalam elemen portofolio ke-*j*
- σ_i^2 = varians tingkat keuntungan elemen portofolio ke-*i*
- σ_{ij} = kovarian antara elemen portofolio ke-*i* dengan ke-*j*
- $\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$
- ρ_{ij} = koefisien korelasi antara elemen portofolio ke-*i* dengan ke-*j*
- σ_i = standar deviasi tingkat keuntungan elemen portofolio ke-*i*
- σ_j = standar deviasi tingkat keuntungan elemen portofolio ke-*j*

Dengan demikian diversifikasi Markowitz merupakan salah satu manajemen portofolio yang lebih realistis. Untuk selanjutnya, yang dimaksud diversifikasi dalam tulisan ini adalah diversifikasi menurut Markowitz.



Gambar 2. Prinsip Portofolio Markowitz model

Jika diversifikasi menggunakan model Markowitz dilakukan dengan benar, maka diversifikasi tersebut akan menghasilkan portofolio efisien yang selalu berada di garis *efficient frontier*.

Perwujudan prinsip portofolio dan diversifikasi tersebut menyaranakan kepada investor suatu keharusan pemahaman yang mendalam tentang berbagai jenis kombinasi proporsi dana yang ditanamkan pada berbagai jenis saham yang paling efisien. Investor harus mampu membagi dan memecah dana investasi pada berbagai jenis saham biasa yang diterbitkan oleh berbagai perusahaan agar portofolio yang dibentuknya mampu menghasilkan sekumpulan investasi yang paling efisien.

METODE PENELITIAN

Dengan demikian dari seluruh uraian tersebut kiranya dapat diketahui betapa pentingnya pengetahuan tentang peranan kombinasi yang efisien dari proporsi dana yang ditanamkan pada berbagai jenis saham biasa. Itu berarti proporsi jumlah masing-masing dana pada masing-masing jenis saham harus diukur sedemikian rupa agar kombinasinya menghasilkan gabungan elemen-elemen investasi portofolio yang efisien.

Analisis efisiensi proporsi elemen portofolio dapat dilakukan berdasarkan beberapa tahapan sebagai berikut.

a. Pembentukan Portofolio

Langkah awal dalam analisis efisiensi proporsi elemen portofolio adalah pembentukan portofolio itu sendiri. Pada tahap ini, peneliti membentuk portofolio yang saham-sahamnya dipilih dari saham-saham yang termasuk dalam indeks LQ45. Indeks LQ45 adalah saham-saham yang memiliki beberapa kriteria, di antaranya mempunyai frekuensi perdagangan tertinggi, likuid, serta memiliki kapitalisasi tertinggi dalam 1- 2 bulan terakhir. Dari 45 jenis saham, dalam penelitian ini, dipilih 15 jenis saham yang mempunyai frekuensi perdagangan tertinggi. Melalui pemilihan ini diharapkan akan diperoleh portofolio yang diduga berpotensi menghasilkan portofolio yang efisien.

b. Penentuan Portofolio Efisien dan penentuan proporsi (dana) elemen portofolio efisien

Namun, portofolio yang terbentuk belum tentu merupakan portofolio yang efisien. Karena itu langkah selanjutnya adalah melakukan analisis untuk menentukan apakah portofolio tersebut sudah efisien atau belum. Tolok ukur portofolio efisien adalah konsep portofolio efisien itu sendiri, yakni portofolio yang menghasilkan tingkat keuntungan yang diharapkan (*expected return*) maksimum pada tingkat risiko tertentu, atau portofolio yang mampu menghasilkan *expected return* tertentu pada tingkat risiko minimum.

Pada tahap ini, penentuan portofolio efisien dilakukan dengan cara mencari risiko portofolio minimum, karena logikanya adalah adanya kebebasan menentukan seberapa besar *expected return* yang dikehendaki agar diperoleh risiko portofolio yang minimum. Risiko portofolio minimum dapat dicari dengan suatu model matematis yaitu metode *optimality lagrange*. Melalui metode ini, selain dapat menghasilkan risiko portofolio minimum, sekaligus dapat ditentukan kombinasi proporsi elemen-elemen portofolio yang efisien. Dengan demikian langkah penentuan portofolio efisien dan penentuan proporsi (dana) elemen portofolio dapat dilakukan secara bersamaan, yakni menentukan portofolio efisien sekaligus mencari kombinasi proporsi yang efisien di antara berbagai kombinasi proporsi elemen-elemen portofolio yang mungkin.

c. Pengukuran *return* ekspektasi dan risiko

Saham-saham yang terpilih (15 jenis) kemudian ditetapkan sebagai elemen-elemen pembentuk portofolio. Saham-saham tersebut berpotensi membentuk portofolio yang efisien. Selanjutnya, setiap saham tersebut diukur tingkat *return* ekspektasi dan risikonya. *Return* merupakan hasil yang diperoleh dari investasi. *Return* dapat berupa *return* realisasi (*realized return*) yang sudah terjadi, atau *return* ekspektasi (*expected return*) yang belum terjadi tetapi diharapkan akan terjadi di masa mendatang. Berbeda dengan *return* realisasi yang sifatnya sudah terjadi, *return* ekspektasi sifatnya belum terjadi.

Return realisasi dihitung berdasarkan data historis. *Return* realisasi penting karena digunakan sebagai salah satu pengukur kinerja perusahaan. *Return* histori ini juga berguna sebagai dasar penentuan *return* ekspektasi dan risiko di masa datang. *Return* realisasi terdiri dari *capital gain (loss)* dan *yield*. *Capital gain (loss)* adalah selisih dari harga investasi sekarang relatif terhadap harga periode yang lalu. *Yiel* merupakan persentase penerimaan kas periodik terhadap harga investasi periode tertentu dari suatu investasi. Untuk saham, *yield* merupakan persentase dividen terhadap harga saham periode sebelumnya. Dengan demikian *return* realisasi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$Return\ realisasi = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} + \frac{D_t}{P_{t-1}} = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}}$$

dimana:

- P_t = harga investasi sekarang (periode t)
- P_{t-1} = harga investasi periode lalu
- D_t = pembayaran dividen periodik periode t

Selanjutnya, *return* yang diperhitungkan adalah *return* ekspektasi karena yang dibahas adalah analisis potensi nilai masa depan investasi pada sekelompok saham. Ada berbagai cara untuk menentukan *return* ekspektasi saham dan risikonya. Penelitian kali ini *return* ekspektasi diukur menggunakan rata-rata *return* realisasi selama periode tertentu. Sedangkan risiko diukur menggunakan standar deviasinya.

d. Pengukuran tingkat *return* ekspektasi dan risiko portofolio

Setelah setiap saham (elemen) diketahui *return* ekspektasi dan risikonya, maka langkah selanjutnya adalah menghitung *return* ekspektasi dan risiko pada tingkat portofolio. *Return* ekspektasi portofolio adalah rerata tertimbang dari *return-return* ekspektasi tiap-tiap elemen (saham) pembentuk portofolio. Rumus untuk menghitung *return* ekspektasi portofolio adalah sebagai berikut:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot E(R_i) \dots\dots\dots (1)$$

Rumus tersebut menunjukkan bahwa data yang dibutuhkan untuk mencari *return* ekspektasi portofolio adalah porsi (bobot) tiap elemen (saham) ke- i terhadap seluruh elemen dalam portofolio () misal dana yang diinvestasikan pada saham ke- i , dengan syarat jumlah total proporsi ini sama dengan 1 (satu), dan ω_i proporsi setiap elemennya tidak boleh negatif. Sehingga:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \quad ; \quad \omega_i \geq 0 \dots\dots\dots (2)$$

Disamping itu, data lainnya yang dibutuhkan adalah *return* ekspektasi setiap elemen (saham) portofolionya, $\hat{\theta}(\hat{\mu}_v)$. Risiko portofolio adalah varian *return* elemen-elemen (saham) pembentuk portofolio tersebut. Pengembangan konsep tersebut menghasilkan suatu rumus risiko portofolio yang merupakan

penjumlahan varian dan kovarian sesuai dengan proporsi masing-masing elemen portofolionya, seperti yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij}$$

Rumus tersebut dapat dijabarkan menjadi:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij}$$

dimana:

σ_p^2 = risiko portofolio (varians tingkat keuntungan portofolio)

ω_i = proporsi dana yang diinvestasikan dalam elemen portofolio ke- i

ω_j = proporsi dana yang diinvestasikan dalam elemen portofolio ke- j

σ_i^2 = varians tingkat keuntungan elemen portofolio ke- i

σ_{ij} = kovarian antara elemen portofolio ke- i dengan ke- j

$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$

ρ_{ij} = koefisien korelasi antara elemen portofolio ke- i dengan ke- j

σ_i = standar deviasi tingkat keuntungan elemen portofolio ke- i

σ_j = standar deviasi tingkat keuntungan elemen portofolio ke- j

e. Penentuan portofolio efisien dan komposisi elemen portofolio optimal

Tahap selanjutnya dalam analisis ini adalah mencari portofolio efisien, yaitu portofolio yang mampu menghasilkan *return* ekspektasi (tingkat keuntungan yang diharapkan) minimum pada tingkat risiko portofolio tertentu, atau portofolio yang mampu menghasilkan *return* ekspektasi tertentu pada tingkat risiko minimum. Dari portofolio efisien tersebut kemudian dicari kombinasi proporsi elemen-elemennya. Langkah ini merupakan tahap terakhir analisis ini.

Uraian berikut ini merupakan penjelasan tentang mencari portofolio efisien dengan cara meminimumkan risiko portofolionya. Cara ini dipilih dengan alasan penulis bebas menentukan keuntungan yang diharapkan pada tingkat berapapun yang dikehendaki agar diperoleh risiko portofolio yang minimum.

Pencarian nilai ekstrim (optimum), maksimum atau minimum, sebuah fungsi yang menghadapi kendala berupa sebuah fungsi lain, dapat diselesaikan dengan metode *optimality lagrange* (Dumairy, 1999). Caranya adalah dengan membentuk fungsi baru, disebut fungsi lagrange, yang merupakan penjumlahan dari fungsi yang hendak dioptimalkan (fungsi variabel tertentu atau *certainty variable*) ditambah hasil perkalian pengganda lagrange (λ) dengan fungsi kendalanya. Pengganda lagrange λ adalah suatu variabel tak-tentu (*uncertainty variable*) yang hanya bersifat sebagai pembantu. Syarat tersebut merupakan syarat yang diperlukan untuk menghitung nilai ekstrim (optimal) dari fungsi baru yang dibentuk, dan karenanya disebut sebagai syarat yang diperlukan atau *necessary condition*. Akan tetapi untuk mengetahui jenis nilai ekstrim tersebut, maksimum ataukah minimum, masih harus disidik melalui derivatif (turunan) parsial keduanya, yang merupakan syarat yang mencukupkan atau *sufficient condition*.

Teori matematika kalkulus menyatakan bahwa akar-akar suatu persamaan akan berada pada titik-titik optimumnya (titik maksimum atau minimum) apabila turunan pertama persamaan tersebut sama dengan nol. Dan untuk mengetahui apakah akar-akar persamaan tersebut berada pada titik optimumnya, terlebih dulu harus dicari nilai turunan kedua dari persamaan tersebut. Jika nilai turunan kedua dari persamaan tersebut lebih besar dari nol, maka akar-akar persamaan tersebut berada pada titik minimum; sebaliknya jika nilainya lebih kecil dari nol maka akar-akarnya akan berada pada titik maksimum.

Sehingga fungsi lagrange dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$L(w) = Z = \alpha(w) + \lambda.\beta(w)$$

dimana:

$L(w) = Z$ = fungsi lagrange

$\alpha(w)$ = fungsi variabel (risiko portofolio)

$\beta(w)$ = fungsi kendala (tingkat keuntungan portofolio yang diharapkan dan proporsi dana yang diinvestasikan dalam setiap elemen portofolio)

λ = lagrange multiplier

Tujuan kita adalah mencari nilai ekstrim fungsi baru lagrange. Sesuai dengan pernyataan matematika kalkulus di atas, bahwa akar-akar suatu persamaan akan berada pada titik-titik optimumnya (titik maksimum atau minimum) apabila turunan pertama persamaan tersebut sama dengan nol, maka fungsi lagrange terlebih dulu diturunkan secara parsial (derivatif parsial) kemudian turunan parsial pertama tersebut disamakan dengan nol. Dengan demikian, jika fungsi lagrange diturunkan secara parsial dan disamakan dengan nol, akan diperoleh persamaan:

$$\frac{\partial Z}{\partial w_i} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Z}{\partial \lambda_i} = 0$$

Selanjutnya, untuk mengetahui jenis atau posisi nilai-nilai ekstrim tersebut, maksimum ataukah minimum, masih harus disidik melalui derivatif (turunan) parsial keduanya. Jika nilai persamaan turunan parsial keduanya lebih besar dari nol, maka nilai ekstrim tersebut berada pada posisi minimum, yang berarti fungsi lagrange pada posisi minimum (berarti nilai Z minimum). Sebaliknya, jika nilai persamaan turunan parsial keduanya lebih kecil dari nol, maka nilai ekstrim tersebut berada pada posisi maksimum, yang berarti fungsi lagrange pada posisi maksimum (berarti nilai Z maksimum). Penjelasan tersebut dapat dinyatakan dalam persamaan:

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial^2 Z}{\partial w_i^2} < 0 & \text{da} & \frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda_i^2} < 0 \quad \text{nila } Z \text{ maksimum} \\ n & & i \\ & & \text{maka} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial w_i^2} > 0 & & \frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda_i^2} > 0 \quad Z \text{ minimum} \\ & \text{da} & \\ n & & \text{maka} \quad \text{nila} \\ & & i \end{array}$$

Penjelasan berikut menguraikan penggunaan metode *optimality lagrange* dalam analisis ini. Dengan metode ini, selain dapat menghasilkan risiko portofolio minimum, kita juga dapat mencari kombinasi ideal atau efisien diantara berbagai kombinasi proporsi elemen-elemen portofolionya.

Berdasarkan konsep matematis metode lagrange di atas, maka persamaan risiko portofolio (persamaan 3) merupakan variabel tertentu dari fungsi lagrange karena merupakan persamaan yang akan dioptimalkan (diminimumkan). Dengan demikian dapat dinyatakan:

a. Fungsi variabel tertentu yang hendak dioptimalkan:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij}$$

Portofolio efisien adalah portofolio yang mampu menghasilkan tingkat tertentu keuntungan yang diharapkan pada tingkat risiko minimum. Maka dengan demikian pencarian risiko portofolio minimum dibatasi oleh suatu kendala, yaitu keuntungan yang diharapkan pada tingkat yang kita kehendaki. Padahal tingkat keuntungan yang diharapkan itu sendiri dibatasi oleh kendala proporsi elemen portofolio yang jumlah totalnya harus sama dengan satu. Dengan demikian dapat dinyatakan:

b. Fungsi kendala:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot E(R_i) \quad \text{ata} \quad \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot E(R_i) - E(R_p) = 0 \quad \dots\dots (1)^*$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \quad \text{ata} \quad \sum_{i=1}^n \omega_i - 1 = 0 \quad \dots\dots (2)^*$$

*(dalam membentuk fungsi baru lagrange, fungsi yang menjadi kendala harus selalu diimplisitkan terlebih dulu).

Karena pembentukan fungsi baru (fungsi lagrange), merupakan penjumlahan dari fungsi yang hendak dioptimalkan (fungsi variabel tertentu atau *certainty variable*) ditambah hasil perkalian pengganda lagrange λ dengan fungsi kendalanya. Maka, berdasarkan konsep matematis metode *optimality lagrange* di atas, fungsi lagrange (Z) terbentuk dari penjumlahan persamaan risiko portofolio (persamaan 3) ditambah dengan perkalian antara pengganda lagrange (λ) dengan persamaan tingkat keuntungan yang diharapkan (persamaan kendala 1 yang sudah dinyatakan dalam bentuk implisit) dan persamaan proporsi setiap elemen portofolio (persamaan kendala 2 yang sudah dinyatakan dalam bentuk implisit).

Sehingga fungsi lagrange (Z) dapat dinyatakan dalam persamaan sebagai berikut:

c. Fungsi lagrange

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} + \lambda_1 \left[\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot E(R_i) - E(R_p) \right] + \lambda_2 \left[\sum_{i=1}^n \omega_i - 1 \right] \quad \dots\dots\dots (4)$$

Jika portofolio yang telah terbentuk terdiri dari *n* elemen, maka persamaan lagrange di atas dapat diuraikan menjadi persamaan berikut:

$$\begin{aligned} Z &= \omega_1\omega_1\sigma_{11} + \omega_1\omega_2\sigma_{12} + \dots\dots + \omega_1\omega_n\sigma_{1n} + \\ &\quad \omega_2\omega_1\sigma_{21} + \omega_2\omega_2\sigma_{22} + \dots\dots\dots + \omega_2\omega_n\sigma_{2n} + \\ &\quad \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ &\quad \omega_n\omega_1\sigma_{n1} + \omega_n\omega_2\sigma_{n2} + \dots\dots\dots + \omega_n\omega_n\sigma_{nn} + \\ &\quad \lambda_1 \left[\omega_1 \cdot E(R_1) + \omega_2 \cdot E(R_2) + \dots\dots\dots + \omega_n \cdot E(R_n) \right] - E(R_p) + \\ &\quad \lambda_2 \left[(\omega_1 + \omega_2 + \dots\dots\dots + \omega_n) - 1 \right] \end{aligned}$$

Kemudian persamaan lagrange tersebut diturunkan secara parsial terhadap variabel-variabelnya dan disamakan dengan nol, menjadi persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial \omega_1} &= 2\omega_1\sigma_{11} + 2\omega_2\sigma_{12} + \dots + 2\omega_n\sigma_{1n} + \lambda_2 + \lambda_1 E(R_1) = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial \omega_2} &= 2\omega_1\sigma_{21} + 2\omega_2\sigma_{22} + \dots + 2\omega_n\sigma_{2n} + \lambda_2 + \lambda_1 E(R_2) = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial Z}{\partial \omega_n} &= 2\omega_1\sigma_{n1} + 2\omega_2\sigma_{n2} + \dots + 2\omega_n\sigma_{nn} + \lambda_2 + \lambda_1 E(R_n) = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial \lambda_1} &= \{\omega_1 \cdot E(R_1) + \omega_2 \cdot E(R_2) + \dots + \omega_n \cdot E(R_n)\} - E(R_p) = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial \lambda_2} &= (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) - 1 = 0 \end{aligned}$$

Persamaan-persamaan yang merupakan turunan parsial pertama fungsi lagrange tersebut akan menyebabkan nilai Z optimum. Untuk mengetahui apakah tingkat risiko portofolio tersebut berada pada posisi maksimum atau minimum, kita masih harus mencarinya dengan melakukan penurunan parsial kedua terhadap persamaan lagrange tersebut. Namun jika hal ini dilaksanakan, yang akan diperoleh hanya nilai optimum risiko portofolionya saja, sedangkan berapa kombinasi optimal proporsi setiap elemennya tidak diketahui. Untuk itu dilakukan cara lain agar nilai optimum risiko portofolio dan proporsi optimal setiap elemennya dapat diketahui, pada tingkat keuntungan yang diharapkan pada tingkat tertentu yang dikehendaki.

Caranya adalah dengan memanfaatkan konsep matriks Jacobian. Terlihat dari bentuknya, persamaan-persamaan turunan tersebut merupakan persamaan linier, dimana proporsi elemen portofolio adalah variabel-variabel berpangkat satu. Sehingga persamaan-persamaan tersebut bisa ditulis dalam bentuk matriks Jacobian sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & 1 & E(R_1) \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \dots & 2\sigma_{2n} & 1 & E(R_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \dots & 2\sigma_{nn} & 1 & E(R_n) \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ E(R_1) & E(R_2) & \dots & E(R_n) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ E(R_p) \end{bmatrix}$$

atau bisa dinyatakan dengan simbol berikut:

$$C \cdot \omega = k$$

Dimana:

C = koefisien matriks

ω = proporsi (vektor penimbang)

k = konstanta (vektor konstanta)

Pada tahap ini proporsi ω yang akan dicari (proporsi ideal) sudah menjadi bagian dalam persamaan di atas. Untuk mendapatkan berapa proporsi tersebut, dibutuhkan alat bantu matriks

inverse dari matriks koefisien, yang dilambangkan dengan C^{-1} . Kemudian kedua ruas persamaan di atas dikalikan dengan matriks inverse tersebut.

$$\begin{aligned} C \cdot \omega &= k \\ (C^{-1} \cdot C) \cdot \omega &= C^{-1} \cdot k \\ 1 \cdot \omega &= C^{-1} \cdot k \\ \omega &= C^{-1} \cdot k \end{aligned}$$

Dengan demikian terlebih dahulu harus dicari matriks inverse dari matriks koefisien tersebut, kemudian hasilnya dikalikan dengan k . Perkalian tersebut akan menghasilkan persamaan linier sebanyak n elemen portofolio, yaitu:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_1 + b_1 \cdot E(R_p) \\ \omega_2 &= a_2 + b_2 \cdot E(R_p) \\ &\vdots \\ \omega_n &= a_n + b_n \cdot E(R_p) \end{aligned}$$

dimana a_n dan b_n adalah konstanta.

Persamaan-persamaan tersebut merupakan persamaan proporsi elemen-elemen portofolio yang optimal karena akan menghasilkan risiko portofolio optimum (minimum) pada setiap tingkat keuntungan yang diharapkan yang dikehendaki, dimana:

$$E(R_p) \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

Dengan demikian, jika seorang investor menginginkan portofolio investasinya menghasilkan keuntungan pada tingkat tertentu maka ia tinggal memasukkan nilai keuntungan yang diharapkannya tersebut ke dalam setiap persamaan proporsi di atas. Selanjutnya, nilai proporsi tersebut digunakan untuk mencari risiko portofolio, yang hasilnya adalah risiko portofolio minimum pada tingkat keuntungan tadi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembentukan Portofolio Awal

Langkah awal dalam analisis efisiensi proporsi elemen portofolio adalah pembentukan portofolio itu sendiri. Pada tahap ini, peneliti membentuk portofolio yang saham-sahamnya dipilih dari saham-saham yang termasuk dalam indeks LQ45. Dari 45 jenis saham, dalam penelitian ini, dipilih 15 jenis saham yang mempunyai frekuensi perdagangan tertinggi. Melalui pemilihan ini diharapkan akan diperoleh portofolio yang diduga berpotensi menghasilkan portofolio yang efisien. Portofolio awal yang terbentuk adalah seperti berikut (tabel 1).

Data pada tabel 1 kemudian digunakan untuk menghitung $E(R_p)$ dan risiko portofolio awal menggunakan rumus 1 dan 3. Data lain yang diperlukan adalah varian dan covarian antar return saham $E(R_i)$. Data varian dan covarian dapat dilihat di lampiran. Hasil tersebut akan menempatkan portofolio pada suatu titik di area *attainable set*, tetapi belum tentu berada di garis *efficient frontier*.

Kemudian persamaan lagrange tersebut diturunkan secara parsial terhadap variabel-variabelnya dan disamakan dengan nol, menjadi persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{d\omega_{INKP}} &= 2\omega_{INKP}\sigma_{INKP,INKP} + 2\omega_{BBTN}\sigma_{INKP,BBTN} + \dots + 2\omega_{PWON}\sigma_{INKP,PWON} + \lambda_2 + \lambda_1 E(R_{INKP}) = 0 \\ \frac{dZ}{d\omega_{BBTN}} &= 2\omega_{INKP}\sigma_{BBTN,INKP} + 2\omega_{BBTN}\sigma_{BBTN,BBTN} + \dots + 2\omega_{PWON}\sigma_{BBTN,PWON} + \lambda_2 + \lambda_1 E(R_{BBTN}) = 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \frac{dZ}{d\omega_{PWON}} &= 2\omega_{INKP}\sigma_{PWON,INKP} + 2\omega_{BBTN}\sigma_{PWON,BBTN} + \dots + 2\omega_{PWON}\sigma_{PWON,PWON} + \lambda_2 + \lambda_1 E(R_{PWON}) = 0 \\ \frac{dZ}{d\lambda_1} &= \{\omega_{INKP} \cdot E(R_{INKP}) + \omega_{BBTN} \cdot E(R_{BBTN}) + \dots + \omega_{PWON} \cdot E(R_{PWON})\} - E(R_p) = 0 \\ \frac{dZ}{d\lambda_2} &= (\omega_{INKP} + \omega_{BBTN} + \dots + \omega_{PWON}) - 1 = 0 \end{aligned}$$

Persamaan-persamaan tersebut bisa ditulis dalam bentuk matriks Jacobian sebagai berikut:

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{Koefisien matriks } C} \underbrace{\hspace{2em}}_{\text{Proporsi } \omega} \underbrace{\hspace{2em}}_{\text{Konstanta } k}$$

Pada tahap ini proporsi yang akan dicari (proporsi ideal) sudah menjadi bagian dalam persamaan di atas. Untuk mendapatkan berapa proporsi tersebut, dibutuhkan alat bantu matriks inverse dari matriks koefisien, yang dilambangkan dengan C^{-1} . Kemudian kedua ruas persamaan di atas dikalikan dengan matriks inverse tersebut.

$$\begin{aligned} C \cdot \omega &= k \\ (C^{-1} \cdot C) \cdot \omega &= C^{-1} \cdot k \\ 1 \cdot \omega &= C^{-1} \cdot k \\ \omega &= C^{-1} \cdot k \end{aligned}$$

Dengan demikian terlebih dahulu harus dicari matriks inverse dari matriks koefisien tersebut, kemudian hasilnya dikalikan dengan k . Perkalian tersebut akan menghasilkan persamaan linier sebanyak n elemen portofolio, yaitu:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_1 + b_1 \cdot E(R_p) \\ \omega_2 &= a_2 + b_2 \cdot E(R_p) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \omega_n &= a_n + b_n \cdot E(R_p) \end{aligned}$$

dimana a_n dan b_n adalah konstanta.

Persamaan proporsi ideal hasil dari proses ini adalah sebagai berikut.

Tabel 2.
Persamaan Proporsi Portofolio Efisien

No	Saham	Persamaan Proporsi	No	Saham	Persamaan Proporsi
1	INKP	$W1 = 3,6515 - 5,9313 \cdot E(R_p)$	9	INDF	$W9 = 9,1039 - 112,7484 \cdot E(R_p)$
2	BBTN	$W2 = -15,5228 + 184,8658 \cdot E(R_p)$	10	JPFA	$W10 = 9,0978 - 124,6177 \cdot E(R_p)$
3	BBNI	$W3 = -21,4178 + 300,7758 \cdot E(R_p)$	11	HMSB	$W11 = -4,4501 + 41,7516 \cdot E(R_p)$
4	WIKA	$W4 = 0,8109 - 4,6140 \cdot E(R_p)$	12	CTRA	$W12 = -4,4679 + 55,4816 \cdot E(R_p)$
5	BBRI	$W5 = 8,7081 - 74,9593 \cdot E(R_p)$	13	EXCL	$W13 = 3,4494 - 55,2657 \cdot E(R_p)$
6	BTPS	$W6 = 12,4511 - 197,9223 \cdot E(R_p)$	14	TKIM	$W14 = -28,0524 + 352,3740 \cdot E(R_p)$
7	SMRA	$W7 = -5,2481 + 105,0878 \cdot E(R_p)$	15	PWON	$W15 = 15,7777 - 219,0242 \cdot E(R_p)$
8	PTPP	$W8 = 17,1088 - 245,2538 \cdot E(R_p)$			

Menggunakan persamaan-persamaan proporsi ideal tersebut, jika kita masukkan $E(R_p)$ sebesar 0,014806 (dari tabel 4.2), maka akan diperoleh risiko portofolio sebesar 6,50521E-17. Tingkat risiko ini jauh lebih rendah jika dibandingkan risiko portofolio sebelum menggunakan proporsi ideal, yaitu 0,00028591 (dari tabel 4.2). Hal ini diakibatkan penghitungan risiko portofolio menggunakan proporsi ideal hasil simulasi menggunakan metoda *optimality lagrange*.

Portofolio tersebut merupakan portofolio efisien dan berada di garis *efficient frontier*.

Dengan demikian jika seorang investor berencana membentuk portofolio efisien, maka sebaiknya ditentukan terlebih dulu proporsi ideal dari masing-masing saham pembentuk portofolionya.

KESIMPULAN DAN SARAN

Penelitian dan pembahasan mengenai simulasi secara matematis optimalisasi komposisi proporsi portofolio saham menggunakan metoda Optimality Lagrange Multiplier menghasilkan beberapa simpulan sebagai berikut.

- Pembentukan portofolio tanpa memperhitungkan komposisi proporsi setiap saham pembentuk portofolio belum tentu akan menghasilkan portofolio efisien.
- Pembentukan portofolio efisien dapat dilakukan dengan cara, salah satunya adalah dengan mengatur komposisi proporsi dana atau jumlah saham pembentuk portofolio, melalui metoda Optimality Lagrange Multiplier.
- Hasil simulasi sampel portofolio dalam penelitian ini, yaitu pada tingkat $E(R_p)$ sebesar 0,014806 (dari tabel 4.2), maka akan diperoleh risiko portofolio sebesar 6,50521E-17. Tingkat risiko ini jauh lebih rendah jika dibandingkan risiko portofolio sebelum menggunakan proporsi ideal, yaitu 0,00028591 (dari tabel 4.2).

Dengan demikian jika seorang investor berencana membentuk portofolio efisien, maka sebaiknya ditentukan terlebih dulu proporsi ideal dari masing-masing saham pembentuk portofolionya.

DAFTAR PUSTAKA

- Brown, SJ, and JB. 1985. Warner, "Using Daily Stock Return: The Case of Event Studies," *Journal of Financial Economics* 14 pp. 3-31.
- Christy, George A., and Clendenin, John C., Ph.D., 1982. *Introduction to Investments*, 8th Ed., Mc. Graw-Hill Book Co., New York,
- Dumairy, 1999. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*, BPFE, Yogyakarta. Fama, Eugene F., 1976. *Foundation of Finance, Basic Book*, New York,
- Francis, Jack Clark, 1986 *Investment Analysis and Management*, 4th Ed., Mc Graw-Hill Book Co., New York,
- Francis, Jack Clark, Archer, Stephen H., and Cliffs, Englewood, 1971. *Portfolio Analysis*, Prentice Hall, New Jersey,
- Gup, Benton E., 1986. *The Basics of Investing*, 3rd Ed., John Wiley and Sons, New York,
- Jogiyanto, HM., 1998. *Teori Portofolio dan Analisis Investasi*, BPFE, Yogyakarta, hal. 161. Kompas, 7 Desember 1990.
- , 25 Februari 2006.
- Markowitz, HM., 1952. "Portfolio Selection," *Journal Of Finance*, (March, 1952), pp. 77-91.
- Sharpe, William, "A Simplified Model for Portfolio Analysis," *Management Science* 9 (January 1963), pp. 277-293.
- Usman, Marzuki, "Deregulasi Pasar Modal dan Perkembangan Harga Saham," *Seminar*, Pebruari 1988, Jakarta.
- , "Pembiayaan Investasi Melalui Pasar Modal," *Seminar tentang Pembiayaan Investasi: Kendala dan Prospek*, Oktober, 1989, Jakarta.