PREDIKSI BILANGAN SUNSPOT DENGAN MODEL ARIMA

Slamet Syamsudin, Datmalem Tarigan, Wilson Sinambela, Agus Salim
Lembaga Penerbangan dan Antariksa Nasional

Abstrak

Salah satu data matahari yaitu bilangan sunspot diamati secara berurut berdasarkan satuan waktu tertentu. Dari pengamatan kemunculan bilangan sunspot dapat dikatakan mengikuti hukum probabilistik atau dengan perkataan lain kemunculan bilangan sunspot merupakan suatu proses stokhastik. Salah satu model proses stokhastik adalah model ARIMA. Untuk merumuskan proses kemunculan bilangan sunspot kepada model ARIMA perlu terlebih dahulu dikaji data-data yang tersedia apakah data tersebut merupakan deret waktu yang stationer atau tidak, dengan cara mengkaji perilaku fungsi autokorelasinya, jika hasil pengkajian data tersedia menyatakan proses deret waktu yang tidak stasioner, maka perlu dilakukan suatu transformasi, sehingga diperoleh data deret waktu yang stasioner.

Pemilihan orde ARIMA yang terkait dengan data bilangan sunspot dilakukan dengan mengkaji fungsi autokorelasi dan parsialnya. Dari pengkajian ini diperoleh beberapa model yang memenuhi persyaratan dan parameternya ditaksir dengan metode kuadrat kecil.

Untuk menentukan suatu model yang valid dari model-model yang tersedia dilakukan uji statistik chi-square terhadap model tersebut dengan ketelitian 95 %. Jika dari hasil pengujian semua calon model ditolak maka calon tersebut diperbaiki dengan cara melihat residunya, sehingga diperoleh model baru.

Untuk keperluan perhitungan digunakan data bilangan sunspot selama 100 tahun (1874 – 1974). Dari hasil perhitungan dan uji statistiknya diperoleh hasil yang sesuai yaitu model autoregresi stasioner orde dua dan harga parameternya adalah 1.42 dan – 0.73. Dari hasil prediksi diperoleh kesalahan 12 %.

1. PENDAHULUAN

Perubahan iklim dan cuaca merupakan aspek yang berkaitan dengan aktivitas matahari, salah satu faktor yang mempengaruhi perubahan iklim adalah radiasi matahari dan salah satu aktivitas yang mempengaruhi radiasi matahari adalah bilangan sunspot. Variasi aktivitas matahari diduga mempengaruhi iklim di bumi dan beberapa peneliti terdahulu telah menunjukkan adanya korelasi yang baik antara aktivitas matahari dan temperatur permukaan bumi dan temperatur inilah yang menyebabkan terjadinya cuaca dan iklim di bumi (Hansen 1990). Energi matahari total bervariasi secara periodik dan mengikuti siklus sunspot 11 tahun, maka dari itu prediksi aktivitas matahari seperti sunspot perlu untuk diteliti dan diprediksi, sebab dengan mengetahui tingkat aktivitas matahari yang dinyatakan dengan sunspot akan dapat diprediksi dampaknya terhadap atmosfer bumi antara lain adalah iklim bumi.

2. KONSEP ARIMA

Data pengamatan bilangan sunspot (Z_1, Z_2, Z_3, Z_{t-1}, Z_t) dapat dipandang sebagai suatu realisasi khusus dari suatu proses stokhastik. Evolusi kemunculan bilangan sunspot secara empiris dapat dirumuskan kepada salah satu model ARIMA yang dinyatakan sebagai berikut :

$$\psi\,(B)\, Z_t = \phi\,(B)\ \nabla^d\ Z_t = \theta\,(B)\, a_t \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

dengan $\phi\,(B) = (\,1 - \phi_1\, B - \phi_2\, B^2\ -\ \phi_p\, B^p\,)$

$\theta\,(B) = (\,1 - \theta_1\, B - \theta_2\, B^2 - \theta_q\, B^q\,)$

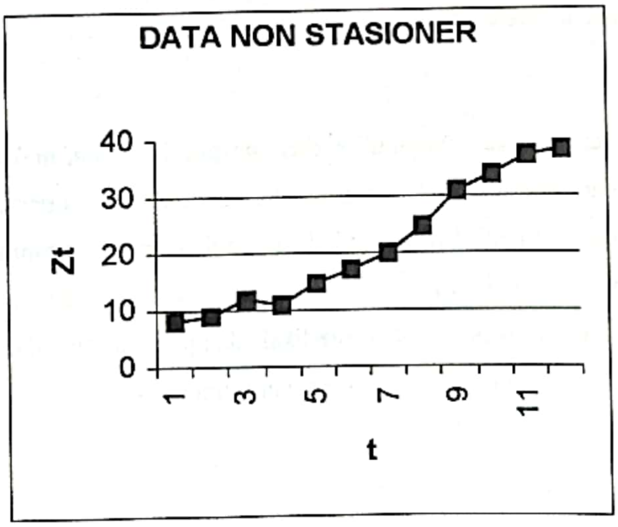
dan $\phi\,(B)$ = operator autoregresi

$\Psi\,(B)$ = operator autoregresi yang diperluas

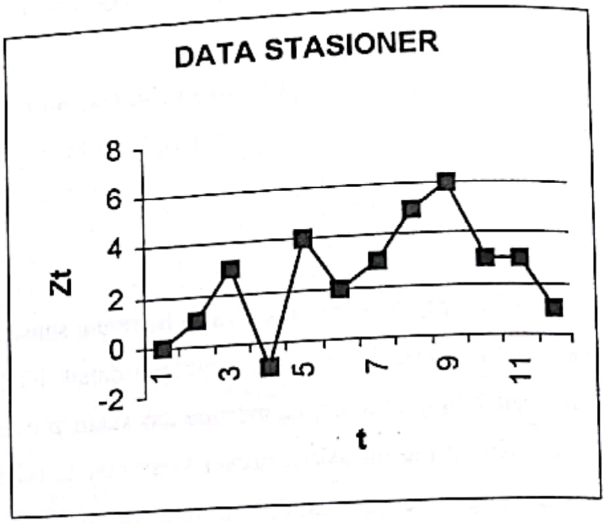
$\theta\,(B)$ = operator moving average.

Pada umumnya kemunculan suatu kejadian fisis yang diamati dari waktu ke waktu berikutnya dapat bersifat tak stasioner yaitu kemunculan suatu data yang bergerak dengan rata-rata yang tidak konstan dan variasinya berubah dari suatu waktu ke waktu berikutnya. Sebaliknya adalah proses stasioner yang bergerak pada suatu rata-rata tertentu dan variasinya terkontrol pada suatu batas tertentu.

Secara grafis proses tidak stasioner dan proses stasioner ditunjukan pada gambar (1) dan gambar (2).



Gambar 1. Data Non stasioner



Gambar 2. Data Stasioner

Oleh karena proses tidak stasioner bervariasi pada batas yang tidak terkontrol, maka proses tersebut tidak dapat diprediksi. Agar supaya suatu proses tidak stasioner Z_t dapat diprediksi dan proses data tersebut perlu ditranformasi ke data W_t yang memenuhi hubungan berikut.

$$\nabla^d\, Z_t = W_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

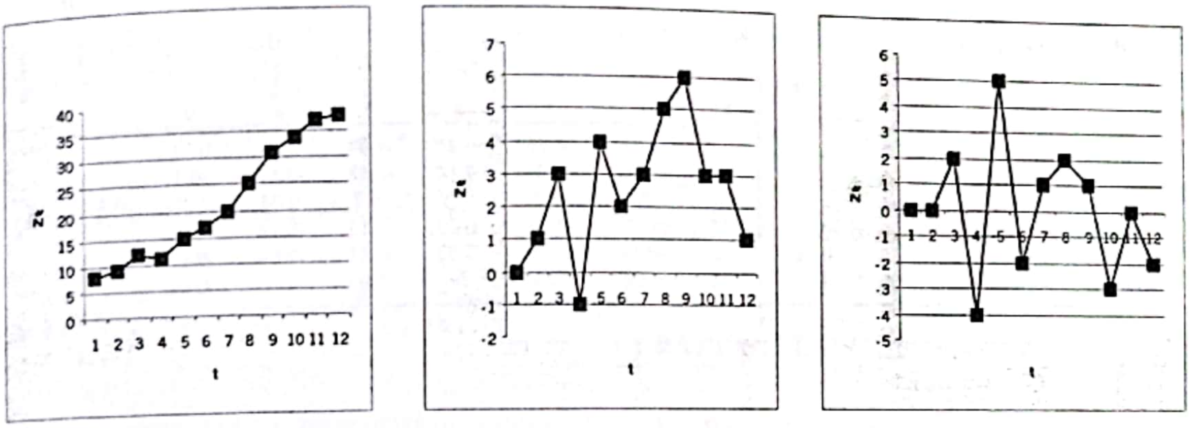
dan d merupakan bilangan bulat yang dipilih sehingga W_t menjadi stasioner. Jika gambar (1) ditranformasikan ke gambar (2) melalui proses untuk d=1 dan untuk d= 2 seperti terlihat pada gambar (3).

3. IDENTIFIKASI

Untuk mengindentifikasi model evolusi suatu kejadian fisis yang berkaitan dengan persamaan (1) diatas, maka perlu dilakukan pendekatan antara evolusi data secara empiris dan sifat matematis dari persamaan tersebut.

Secara umum sifat persamaan (1) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\phi\,(B)\, \rho_k = 0 \text{ jika } k > q$$



Gambar 3. Transformasi data nonstasioner ke stasioner dengan d=1 dan d=2

dan ρ_k merupakan fungsi autokorelasi dan solusi persamaan tersebut adalah :

$$\rho_k = A_1 G_1^{\,k} + A_2 G_2^{\,k} + A_3 G_3^{\,k} + A_p G_p^{\,k}$$

dengan G_1^{-1} merupakan akar karakteristik dari persamaan $\phi(B) = (1 - \phi\ 1\ B - \ \phi_p B^p)$

Jika salah satu akar dari persamaan karakteristik $|\ G1\ |$ mendekati 1 maka harga ρ_k hanya tergantung pada G_k, dan harga ρ_k lambat menuju ke 0, dan jika k menuju tak hingga maka proses tidak stasioner.

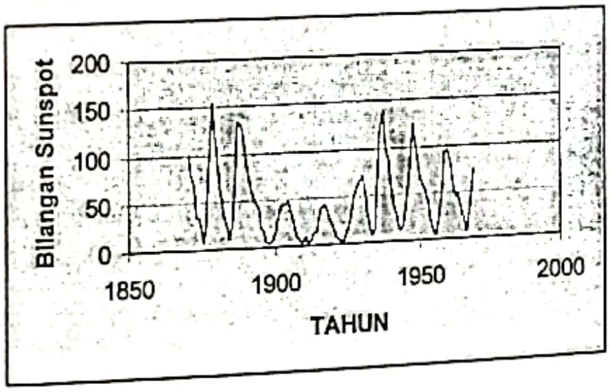
Pada kasus $G_i < 1$ maka proses tersebut dikatakan stasioner dan ciri-ciri ρ_k dapat diamati sebagai berikut :

- Jika G_i riil maka ρ_k secara exponensial menuju ke 0, khususnya jika G_i sama untuk setiap I maka $\rho_k = (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots Ap)G^k$ dan ρk menuju 0 jika $G_i < 1$.
- Jika G_i kompleks maka kontribusi bentuk $d^k \sin(2\pi k + c)$, maka ρ_k mengikuti gelombang sinus yang meredam. Dari (1) jika harga p=0 diperoleh fungsi autokorelasi ρ_k=0 maka proses yang demikian disebut moving average. Harga taksiran autokorelasi dihitung sebagai berikut :

$$r_k = \sum_{t=k+1}^{n} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t-k} - \bar{Z}) \Big/ \sum_{t=1}^{n} (Z_t - Z)^2$$

Z_t = pengamatan ; $\bar{Z}$ = rata-rata n = banyaknya pengamatan

Dari hasil pengamatan sifat evolusi bilangan sunspot yang diamati dari tahun 1870 – 1969 seperti pada gambar 4. diperoleh harga taksiran fungsi autokorelasi (Tabel 1) dan parsialnya (Tabel 2)



Gambar 4. Variasi bilangan sunspot

Dengan n = 100 diperoleh harga taksiran fungsi autokorelasi (Tabel 1) dan parsialnya (Tabel 2).

Tabel 1. Autokorelasi

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z	Lags 1 - 10	0.81	0.43	0.07	-0.17	-0.27	-0.21	-0.04	0.16	0.33	0.14
	11 - 20	0.29	0.14	0.02	-0.06	-0.1	-0.14	-0.18	-0.17	-0.1	
∇Z	Lags 1 - 10	0.55	-0.02	-0.3	-0.4	-0.4	-0.33	-0.2	0.04	0.26	0.31
	11 - 20	0.16	-0.03	-0.12	-0.1	-0.09	-0.09	-0.12	-0.14	-0.05	
∇^2Z	Lags 1 - 10	0.15	-0.31	-0.2	-0.11	-0.09	-0.02	-0.11	-0.04	-0.19	0.05
	11 - 20	0.09	-0.1	-0.11	0.04	0.01	0	-0.03	-0.1	-0.04	

Tabel 2. Parsial Autokorelasi

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z	Lags 1 - 10	0.81	-0.71	0.21	-0.15	0.1	0.1	0.18	0.23	0.01	0
	11 - 20	0.14	-0.16	0.12	0.03	-0.08	-0.14	-0.06	-0.12	0	0.05
∇Z	Lags 1 - 10	0.57	-0.48	-0.06	-0.27	-0.22	-0.26	-0.29	-0.05	-0.02	-0.16
	11 - 20	0.13	-0.15	-0.04	0.06	0.12	0.02	0.07	-0.06	-0.09	-0.06
∇^2Z	Lags 1 - 10	0.15	-0.35	-0.1	-0.21	-0.16	-0.17	-0.36	-0.26	-0.09	-0.33
	11 - 20	-0.02	-0.13	-0.2	-0.21	-0.1	-0.13	0	0.03	-0.01	-0.08

Tabel 1 dengan n = 100 diperoleh standar deviasi = 0.1 dengan batas toleransi 0.2 terlihat bahwa fungsi autokorelasi menurun. Artinya menurut hasil teori identifikasi maka data sunspot tersebut merupakan proses stasioner.

Pada Tabel 2 dengan batas toleransi 0.2 terlihat bahwa fungsi parsial autokorelasi menuju nol setelah orde ke 3, artinya berdasarkan teori parsial autokorelasi diatas data bilangan sunspot mengikuti autoregresi orde 2, AR (2).

4. PEMODELAN

Dari hasil identifikasi diatas diperoleh p=2, q=0, d = 0 dan proses stasioner.

Secara umum model auto regresi dinyatakan dengan taksiran $\hat{W}_t$

$$\hat{W}_t = \sum_{J=1}^{p} \phi_j W_{t-j} \quad \text{dan} \quad W_t = Z_t - \overline{Z}\ , \ Z_t = \text{pengamatan}$$

Taksiran parameter ϕ_1, ϕ_2.... ϕ_p diperoleh dengan meminimumkan kesalahan dari harga $\hat{W}_t$ taksiran.

$S(e) = \sum (W_t - \hat{W}_t)^2$ dan $dS(e)/d\phi = 0$ untuk j=1,2,...p, maka diperoleh sistem persamaan sebagai berikut : X' X ϕ_t = X' Y. dan

$$X = \begin{vmatrix} W_p & W_{p-1} & \cdots & 1 \\ W_{p+1} & W_p & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_{n-1} & W_{n-2} & \cdots & W_{n-p} \end{vmatrix}$$

dan $Y = (W_{p+1}, W_{p+2}, \cdots, W_n)'$ dengan Var (ϕ) = 1-ϕ^2.

Pada AR (2) agar supaya kondisi stasioner harga-harga taksiran ϕ1 dan ϕ2 harus dipenuhi

$(-1 < \phi_2 < 1)$; $(\phi_1 + \phi_2 < 1)$ dan $(\phi_1 - \phi_2 < 1)$

Dari hasil perhitungan data sunspot diatas diperoleh ϕ_1 = 1,43 dan ϕ_2 = -0,73, maka harga taksiran diatas memenuhi sifat stasioner AR (2) yang diperoleh secara teoritis.

5. UJI MODEL

Untuk menvalidasi model taksiran diatas maka harus dicek harga residual a_t tidak berkorelasi dari waktu ke waktu. Dari hasil perhitungan diatas diperoleh fungsi residual adalah

$$a_t = 0{,}3Z + 1{,}43Z_{t-1} - 0{,}73Z_{t-2} + \overline{Z}_t$$

dan fungsi autokorelasi residual a_t dihitung dari

$$r_{\hat{a}}(k) = \sum_{t=k+1}^{n} \left(\hat{a}_t - \bar{\bar{a}}\right)\left(\hat{a}_{t-k} - \bar{\bar{a}}\right) \Big/ \sum_{t=1}^{n} \left(\hat{a}_t - \bar{\bar{a}}\right)^2$$

Box dan Pierr (1970) menunjukkan bahwa untuk sampel besar harga r_a di test dengan menggunakan harga $Q = n\sum rk^2(k)$ harga ini dibandingkan dengan harga $\lambda_{0,05}{}^2$ dengan derajat kebebasan $k - p$, (p = orde auto regresi). Dari hasil perhitungan diperoleh harga Q = 30,9 dan menurut tabel $\lambda_{0,05}{}^2$ (23) = 35,2 dapat dilihat bahwa harga $Q < \lambda_{0,05}{}^2$ (23). Artinya harga taksiran ϕ_1 dan ϕ_2 diatas dapat digunakan untuk memprediksi bilangan sunspot.

6. PREDIKSI

Untuk prediksi bilangan sunspot digunakan persamaan:

$$Z_{t+1} = \phi_1 Z_{t+1-1} + \phi_2 Z_{t+1-2} + (1 - \phi_1 - \phi_2)\ \overline{Z}_t$$

$\phi_1 = \phi_2$ = rata-rata dengan kesalahan $V(e) = (1 + \Sigma\gamma_j^2)^{0.5}$

$\gamma_1 = \phi_1$ dan $\gamma_2 = \phi_1\,\gamma_1 + \phi_2$

7. KESIMPULAN

Untuk memprediksi bilangan sunspot dibutuhkan 2 data berurut sebelum 1. Dari hasil perhitungan prediksi bahwa kesalahan sekitar 12 %.

8. SARAN

Dari uraian diatas model ARIMA tidak hanya berlaku untuk bilangan sunspot tetapi bisa digunakan untuk prediksi cuaca, iklim dan lain-lain dengan catatan prosedur diatas harus dipenuhi.

DAFTAR PUSTAKA :

1. Bovas Abraham and Johannes Ledolter. *Statistical Methods for Forecasting.*
2. Nick T Thomopoulos. *Applied Forecasting Methods*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
3. Goerge E. P. Box. *Time Series Analysis*, Holden Day, New Jersey 0768.
4. Solar Geophysical Data