Metode Baru Lintasan Kritis Pemakaian Bilangan "Fuzzy"

Oleh : S.H. Nasution.

INTISARI

Teknik perencanaan dan pengendalian proyek seperti PERT/CPM memerlukan tersedianya lama pelaksanaan aktivitas berupa harga tertentu atau berupa distribusi harga tersebut. Dalam pemakaian selalu dijumpai hal-hal dimana lama pelaksanaan aktivitas tidak ada distribusinya atau tidak ada harganya yang pasti. Tulisan ini menunjukkan bahwa teori "fuzzy subset" yang diterapkan pada algebra dapat dipakai untuk menangani hal dimana lama pelaksanaan aktivitas tidak diketahui dengan jelas besarnya, yaitu hanya berupa bilangan "fuzzy". Cara perhitungan dan hasilnya analogis dengan CPM.

PENDAHULUAN.

Intisari suatu perencanaan pada pokoknya adalah suatu usaha untuk meredusir ke-tidakpasti-an mengenai waktu, biaya, alat produksi dan volume proyek. Salah satu teknik dan metoda yang berguna dalam perencanaan dan pengendalian suatu proyek adalah PERT—CPM. Dalam teknik ini suatu proyek yang kompleks diuraikan menjadi unsur-unsurnya atau unit yang lebih kecil berupa aktivitas dan dianalisa saling ketergantungan antara aktivitas-aktivitas tersebut. Proses ini memerlukan pertimbangan-pertimbangan : a.Aktivitas-aktivitas apa yang akan dilakukan, b. Bagaimana urut-urutannya. c.Sumber daya yang diperlukan, d.Waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan masing-masing aktivitas.

Hasil teknik PERT—CPM ini adalah suatu model proyek berupa network dengan lintasan kritis, yaitu urutan aktivitas-aktivitas proyek yang menentukan lama berlangsungnya proyek. Dari lintasan kritis ini, kalau perlu manajemen dapat mempertimbangkan alokasi sumber daya untuk meredusir lama proyek. Tambahan lagi aktivitas-aktivitas yang terletak pada lintasan kritis adalah aktivitas-aktivitas proyek yang mesti diawasi dengan ketat.

Syarat untuk menerapkan metoda PERT—CPM ini adalah diketahuinya waktu yang diperlukan untuk penyelesaian suatu aktivitas secara pasti ataupun kalau ini tidak ada maka cukup bila diketahui distribusinya secara statistik. Syarat ini tidak mudah diterapkan dalam praktek, lebih sering dijumpai adalah besaran waktu yang harus ditaksir secara subjektip. Ini dapat disebabkan oleh beberapa hal : informasi tak cukup kuat untuk membuat pernyataan probabilitas, adanya gejala yang tak bercirikan probabilitas ataupun tak diperlukannya suatu data eksak.

Di pihak lain selama dua dasawarsa perkembangannya teori "fuzzy subset" telah berkembang dalam beberapa arah dan applikasinya terlihat dalam berbagai bidang yang beraneka ragam. Istilah "fuzzy" dipakai untuk situasi dimana ketidakpastian bukanlah acak sifatnya tetapi timbul dari batas-batas antara himpunan yang tidak jelas.

"Himpunan orang yang tinggi" dalam pengertian sehari-hari adalah contoh sub-himpunan "fuzzy" suatu "himpunan orang". Konsepsi mengenai sub-himpunan "fuzzy" kemudian diterapkan pula pada bilangan yaitu bilangan "fuzzy" (Dubois dan Prade [2] Mizumoto dan Tanaka [3], sedang penerapan bilangan "fuzzy" pada network dilakukan oleh Gazdik [1]. Dalam tulisan [1] tersebut dipakai dua operasi untuk bilangan "fuzzy" : jumlah dan maximum. Lama pelaksanaan aktivitas diberikan oleh bilangan "fuzzy" yang diskret sedang kedua operasi dilakukan langsung dari definisi.

Penentuan lintasan kritis dilakukan dengan jalan "direct enumeration", suatu hal yang sulit dilakukan meski bagi network yang sedang besarnya.

Dalam tulisan ini dikemukakan metode baru dengan cara yang lebih konvensional, dimana penentuan lintasan kritis dilaksanakan dengan jalan perhitungan "ke depan" dan "mundur" sehingga diperlukan empat operasi yaitu jumlah, selisih, maximum dan minimum. Dengan cara ini didapat hasil yang analogis dengan CPM yaitu waktu paling dini selesainya event, waktu paling lambat yang masih diizinkan bagi terjadinya event dan slack kesemuanya merupakan bilangan "fuzzy" dan akhirnya himpunan lintasan kritis yang bisa terjadi.

Dua bab tulisan ini merupakan pendahuluan yaitu Bab II yang berisi review istilah-istilah teori "fuzzy subset" yang diperlukan dan Bab III tentang pemakaian definisi secara praktis. Bab IV merupakan review metoda lintasan kritis dan Bab V mengemukakan pemakaian bilangan "fuzzy" pada network/analisa lintasan kritis.

BEBERAPA ISTILAH TEORI "FUZZY SUBSET";

Secara singkat akan direview definisi-definisi dasar yang berkaitan dengan isi pokok tulisan ini :

"Fuzzy Subset".

Sebut universum yang menjadi pembicaraan $X = \{x\}$. Sub-himpunan "fuzzy" $\tilde{A}$ pada X adalah suatu pemetaan μ tiap elemen $x \in X$ terhadap bilangan riil pada interval [0,1] :

$$\mu_{\tilde{A}} : X \longrightarrow [0,1]$$

Fungsi Keanggotaan.

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ disebut fungsi keanggotaan elemen x, fungsi mana menunjukkan derajad keterlibatan x dalam $\tilde{A}$. Notasi yang sering digunakan untuk sub himpunan "fuzzy" $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \sum \mu_{\tilde{A}}(x_i) / x_i \quad \text{untuk kasus himpunan yang diskret}$$

$$\tilde{A} = \int \mu_{\tilde{A}}(x) / x \quad \text{untuk kasus himpunan yang kontinyu}$$

$\sum$ Dan $\int$ menunjukkan union semua harga fungsi keanggotaan. Perhatikan bahwa untuk himpunan biasa A :

$$\mu A(x) = \begin{cases} 1 & \text{bila } x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

yaitu ada batas yang jelas apakah x anggota A atau bukan. Dalam sub himpunan "fuzzy" batas ini kabur, samar-samar.

Himpunan tingkat $-\alpha$

Himpunan tingkat $-\alpha$ adalah himpunan biasa A_α yang didefinisikan sebagai berikut :

$$A_\alpha \triangleq \{ x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \} \quad \alpha \in [0,1]$$

Sub-himpunan "fuzzy" $\tilde{A}$ dapat diuraikan dalam himpunan tingkat$-\alpha$

dengan memakai "resolution identity" :

$$\tilde{A} = \int_0 \alpha A_\alpha$$

dimana αA_α adalah perkalian skalar α dengan A_α dan $\int_0^1$ seperti di atas menunjukkan union antara 0 dan 1.

Support $\tilde{A}$.

Support $\tilde{A}$ adalah himpunan tingkat—0 :

$$S(\tilde{A}) \triangleq \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

Support $\tilde{A}$ diberikan dalam bentuk interval pada R :

$$S(\tilde{A}) = [a_1, a_2]$$

Bilangan "fuzzy".

Suatu bilangan "fuzzy" $\tilde{A}$ pada garis bilangan riil R adalah suatu sub-himpunan "fuzzy" dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}$ dimana :

$$\mu_{\tilde{A}} : R \rightarrow [0,1]$$

Bilangan "fuzzy" konvex.

Sebuah bilangan "fuzzy" $\tilde{A}$ disebut konvex bila untuk sebarang bilangan-bilangan riil x, y, z $\in$ R, dimana $x \leqslant y \leqslant z$ berlaku :

$$\mu_{\tilde{A}}(y) \geqslant \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{A}}(z)$$

Simbol $\wedge$ berarti minimum.

Bilangan "fuzzy" normal.

Bilamana berlaku

$$\max_x \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$

maka $\tilde{A}$ disebut bilangan "fuzzy" normal.

Bilangan "fuzzy" positip, negatip dan nol.

Bilangan "fuzzy" $\tilde{A}$ disebut positip (negatip) bila support $S(\tilde{A})$ =

$[a_1, a_2]$ terletak pada garis bilangan riil yang positip (negatip), yaitu :

$$0 < a_1 \leqslant a_2 \qquad (a_1 \leqslant a_2 < 0)$$

Bila $a_1 \leqslant 0 \leqslant a_2$ maka $\tilde{A}$ disebut bilangan "fuzzy" nol. Contoh-contoh bilangan "fuzzy" terlihat pada gambar 1.

Prinsip Perluasan Zadeh.

Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dua bilangan "fuzzy" pada R dan misalkan pula * sebuah operasi biner pada R. Operasi * dapat diperluas agar berlaku juga terhadap bilangan "fuzzy" $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dengan mendefinisikan relasi sebagai berikut :

$$\tilde{A} * \tilde{B} = \int_{a, b \in R} (\mu_{\tilde{A}}(a) \wedge \mu_{\tilde{B}}(b))/(a * b)$$

Jumlah dan Selisih Bilangan "fuzzy".

Bila operasi * pada relasi di atas diganti dengan operasi + dan — maka perjumlahan dan selisih dua bilangan "fuzzy" menghasilkan bilangan "fuzzy" baru yaitu :

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \int (\mu_{\tilde{A}}(a) \wedge \mu_{\tilde{B}}(b))/(a + b)$$

dan

$$\tilde{A} - \tilde{B} = \int (\mu_{\tilde{A}}(a) \wedge \mu_{\tilde{B}}(b))/(a - b)$$

Fungsi keanggotaan yang bersangkutan :

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(t) = \bigvee_{a+b=t} (\mu_{\tilde{A}}(a) \wedge \mu_{\tilde{B}}(b))$$

$$= \bigvee_{a} (\mu_{\tilde{A}}(a) \wedge \mu_{\tilde{B}}(t-a))$$

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(t) = \bigvee (\mu_{\tilde{A}}(a) \wedge \mu_{\tilde{B}}(a-t))$$

dimana simbol $\bigvee$ menandakan maximum.

Maximum dan Minimum Dua Bilangan "fuzzy".

Dengan memakai prinsip perluasan Zadeh, maximum $\widetilde{\max}(\tilde{A},\tilde{B})$ atau minimum $\widetilde{\min}(\tilde{A},\tilde{B})$ untuk dua bilangan "fuzzy" $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\mu_{\widetilde{\max}(\tilde{A},\tilde{B})}(t) = \bigvee_{t=\max(a,b)} (\mu_{\tilde{A}}(a) \wedge \mu_{\tilde{B}}(b))$$

$$\mu_{\widetilde{\min}(\tilde{A},\tilde{B})}(t) = \bigvee_{t=\min(a,b)} (\mu_{\tilde{A}}(a) \wedge \mu_{\tilde{B}}(b))$$

Hasil $\widetilde{\max}(\tilde{A},\tilde{b})$ tidak selalu $\tilde{A}$ atau $\tilde{B}$, tetapi bisa juga suatu bilangan "fuzzy" yang lain dari $\tilde{A}$ atau $\tilde{B}$, demikian juga untuk $\widetilde{\min}(\tilde{A},\tilde{B})$. Operasi $\widetilde{\max}$ dan $\widetilde{\min}$ adalah idempotent, assosiatip, komutatip dan saling distributip. Selanjutnya berlaku :

$$\widetilde{\max}(\tilde{A},\tilde{B}) + \widetilde{\min}(\tilde{A},\tilde{B}) = \tilde{A} + \tilde{B}$$

PEMAKAIAN PRAKTIS DEFINISI.

Representasi Bilangan "fuzzy".

Bilangan "fuzzy" $\tilde{M}$ secara konvensional dapat dinyatakan dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut :

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m_1 - x}{\alpha}\right) & \text{bila } x \leq m_1 ;\ \alpha > 0 \\ 1 & x \in [m_1, m_2] \\ R\left(\frac{x - m_2}{\beta}\right) & x \geq m_2 ;\ \beta > 0 \end{cases}$$

dimana L dan R adalah dua fungsi referensi yang kontinyu sedemikian sehingga :

- $L(0) = R(0) = 1$
- $L(-x) = L(x)$; $R(-x) = R(x)$
- L dan R tak naik pada $[0 + \infty]$
- $L(\infty) = R(\infty) = 0$

Secara simbolis ditulis :

$$\tilde{M} = (m_1, m_2, \alpha, \beta)_{LR}$$

Bilangan "fuzzy" yang sering dipakai adalah yang fungsi keanggotaannya berbentuk segitiga atau trapesium. Untuk bilangan "fuzzy" trapesium simbolnya adalah :

$$\tilde{A} = (a_1, a_2, \alpha, \beta)$$

Bila $a_1 = a_2$ maka didapat bilangan "fuzzy" segitiga dengan simbol :

$$\tilde{B} = (b, \alpha, \beta)$$

Bila selanjutnya $\alpha = \beta$ maka cukup ditulis :

$$\tilde{C} = (c, \gamma)$$

Lihat gambar 2 dan 3.

Jumlah Bilangan "fuzzy"

Misalkan ada dua bilangan "fuzzy" $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ dan $N = (n, \gamma, \delta)_{LR}$, maka dapat ditunjukkan (Dubois dan Prade [2]), bahwa berlaku hubungan

$$\tilde{M} + \tilde{N} = (m+n, \alpha + \gamma, \beta + \delta)_{LR}$$

Dengan demikian maka untuk bilangan "fuzzy" segitiga $\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)$ dan $\tilde{B} = (b, \gamma, \delta)$ berlaku :

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (a+b, \alpha + \gamma, \beta + \delta)$$

Untuk bilangan "fuzzy" trapesium $\tilde{C} = (c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2)$ dan $\tilde{D} = (d_1, d_2, \delta_1, \delta_2)$ berlaku :

$$\tilde{C} + \tilde{D} = (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \gamma_1 + \delta_1, \gamma_2 + \delta_2)$$

Sehubungan dengan sifat bilangan "fuzzy" yang telah disebutkan yaitu maximum dua bilangan "fuzzy" belum tentu sama dengan salah satu dari kedua bilangan tersebut, maka dalam perhitungan harus dikuasai teknik perjumlahan bagi bilangan-bilangan "fuzzy" yang lebih umum bentuk fungsi keanggotaannya. Untuk memudahkan penentuan jumlah ini dipakai identitas (Mizumoto dan Tanaka [3] :

$$(A + B)_\alpha = A_\alpha + B_\alpha$$

Dengan memakai "resolution identity" maka didapat :

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \int_0^1 \alpha\ (A + B)_\alpha = \int_0^1 \alpha\ (A_\alpha + B_\alpha)$$

Konstruksi secára grafis terlihat pada gambar 5.

Selisih Bilangan "fuzzy".

Kita gunakan sifat-sifat perjumlahan bilangan "fuzzy". Bila :

$$\tilde{C} = \tilde{A} - \tilde{B}$$

maka dapat ditulis lebih lanjut :

$$\tilde{C} = \tilde{A} + (-\tilde{B}) = \tilde{A} + \tilde{B}'$$

Perkalian bilangan "fuzzy" $\tilde{B}$ dengan skalar —1 menghasilkan bilangan "fuzzy" yang simetris terhadap $\tilde{B}$ dengan garis tegak lurus pada 0 sebagai sumbu simetri (lihat Dubois dan Prade [2]). Karena itu selisih ini dengan mudah dapat dikonstruksikan (lihat gambar 6).

Maximum dan Minimum Dua Bilangan "fuzzy".

Menurut definisi berlaku :

$$\mu_{\widetilde{max}(\tilde{A},\tilde{B})}(t) = \bigvee_{t = \widetilde{max}(a,b)} \mu_{\tilde{A}}(a) \wedge \mu_{\tilde{B}}(b).$$

Lihat gambar 7 dimana terdapat dua bilangan "fuzzy" $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dan berlaku $S(\tilde{A}) \cap S(\tilde{B}) \neq \emptyset$

— bila $t \leqslant t_1$ maka untuk semua pasangan harga a dan b berlaku

$$\mu_{\widetilde{max}(\tilde{A},\tilde{B})}(t) = \mu_{\tilde{A}}(t)$$

— bila $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ maka untuk semua pasangan harga a dan b :

$$\mu_{\widetilde{max}(\tilde{A},\tilde{B})}(t) = \mu_{\tilde{B}}(t)$$

— bila $t > t_2$ maka untuk semua pasangan harga a dan b :

$$\mu_{\widetilde{\max}(\tilde{A},\tilde{B})}(t) = \mu_{\tilde{A}}(t)$$

Dengan demikian $\widetilde{\max}(\tilde{A},\tilde{B})$ adalah bilangan "fuzzy" yang fungsi keanggotaannya diberikan oleh grafik dengan garis tebal pada gambar 7. Menurut definisi maka :

$$\mu_{\widetilde{\min}(\tilde{A},\tilde{B})}(t) = \bigvee_{t = \min(a,b)} (\mu_{\tilde{A}}(a) \wedge \mu_{\tilde{B}}(b))$$

Perhatikan gambar 8 dimana terdapat bilangan-bilangan "fuzzy" $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang sama seperti pada gambar 7.

— bila $\min(a,b) = t \leqslant t_1$ maka untuk semua pasangan harga a dan b berlaku :

$$\mu_{\widetilde{\min}(\tilde{A},\tilde{B})}(t) = \mu_{\tilde{B}}(t)$$

— bila $t_1 \leqslant t = \min(a,b) \leqslant t_2$ maka untuk semua pasangan harga a dan b

$$\mu_{\widetilde{\min}(\tilde{A},\tilde{B})}(t) = \mu_{\tilde{A}}(t)$$

— demikian juga bila $t > t_2$ maka berlaku :

$$\mu_{\widetilde{\min}(\tilde{A},\tilde{B})}(t) = \mu_{\tilde{B}}(t)$$

Jadi $\widetilde{\min}(\tilde{A},\tilde{B})$ adalah bilangan "fuzzy" yang fungsi keanggotaannya diberikan oleh garis tebalpada gambar 8.

Untuk keperluan praktis $\widetilde{\max}(\tilde{A},\tilde{B})$ dapat ditentukan dengan memilih bagian L dan R dari masing-masing $\mu_{\tilde{A}}$ dan $\mu_{\tilde{B}}$ yang terletak lebih ke kanan, atau untuk $\widetilde{\min}(\tilde{A},\tilde{B})$ yang terletak lebih ke kiri.

KONSTRUKSI MODEL NETWORK.

Komponen Network.

Network PERT/CPM terdiri dari dua komponen utama : aktivitas dan event. Aktivitas pada network adalah gambaran mengenai operasi atau aktivitas sesungguhnya yang terjadi atau akan terjadi. Aktivitas memerlukan waktu dan sumber daya. Event dalam network merupakan milestone pada proyek; sebuah event menggambarkan awal suatu aktivitas, akhir suatu aktivitas ataupun secara umum : awal satu atau beberapa aktivitas dan akhir satu atau beberapa aktivitas. Event biasa digambarkan dengan lingkaran dan aktivitas berupa anak panah ("activity on arrow network").

Ketergantungan Antar Aktivitas/Event.

Lihat network sederhana pada gambar 9. Tiap event telah diberi identifikasi nomer. Event—1 adalah start proyek dan aktivitas-aktivitas 1—2 dan 1—4. Event—2 merupakan selesainya aktivitas 1—2 dan dimulainya aktivitas-aktivitas 2—5, 2—4 dan 2—3. Setelah aktivitas 1—2 selesai, aktivitas 2—5, 2—4 dan 2—3 bisa dimulai dan bisa dilaksanakan serentak. Event—3 adalah selesainya aktivitas 2—3 dan awal dimulainya aktivitas 3—4. Event—4 adalah selesainya aktivitas 2—4, 3—4 dan 1—4 serta awal dimulainya aktivitas 4—5, akan tetapi aktivitas 4—5 tak akan bisa dimulai sebelum semua aktivitas 2—4, 3—4 da ı 1—4 selesai. Event—5 menggambarkan selesainya aktivitas 2—5 dan 4—5 dan dalam network ini juga selesainya proyek.

Penentuan Event Time.

Kita lihat kembali network pada gambar 9. Lama pelaksanaan tiap aktivitas i— j adalah $T_{i,j}$ ditentukan dalam satuan waktu sebagai berikut:

$t_{1,2} = 4$ $\quad t_{1,4} = 8$ $\quad t_{4,5} = 3$

$t_{2,3} = 2$ $\quad t_{2,4} = 2$

$t_{3,4} = 3$ $\quad t_{2,5} = 9$

Dengan tersedianya data ini maka dapat ditentukan :

1. waktu paling dini suatu event dapat terjadi (earliest expected event time — EEET).
2. waktu paling akhir suatu event masih diizinkan terjadi (latest allowable event time — LAET).
3. slack pada tiap event.

Suatu event-j terrealisir paling awal pada saat T_{Aj} segera sesudah semua aktivitas yang berakhir pada event-j yaitu $i_1 - j$, $i_2 - j$, ... $i_{max} - j$ telah selesai, jadi :

$$T_{Aj} = \max (T_{Ai} + t_{i,j}) \qquad i = 1,2, \ldots\ldots i_{max}$$

EEET untuk network kita dapat diketahui dengan menghitung dari start (event—1 ke akhir (event—5) (lihat gambar 10).

Selesainya proyek (event—5) adalah dalam waktu 13 satuan waktu. LAET untuk suatu event (T_{Lj}) adalah saat paling akhir suatu event masih bisa terjadi tanpa mengundurkan selesainya proyek. Proyek dianggap selesai pada waktunya bilamana dapat diselesaikan tak lebih lama dari saat event akhir dapat direalisir paling awal, jadi untuk event akhir berlaku :

$$T_A = T_L$$

Prosedur untuk menghitung T_L bagi tiap event dimulai dari event akhir menuju event awal. Bilamana suatu event-j merupakan awal lebih dari satu aktivitas $j-k_1$, $j-k_2$, ... $j-k_{max}$, maka :

$$T_{Lj} = \min (T_{Lk} - t_{j,k}) \qquad k = 1,2, \ldots\ldots\ldots\ldots k_{max}$$

LAET untuk network terlihat pada gambar 11. Kini dapat dihitung slack untuk tiap event—j :

$$S_j = T_{Lj} - T_{Aj}$$

Lintasan kritis pada network adalah urutan aktivitas yang membentuk jalan terpanjang dalam waktu sehingga dengan demikian menentukan waktu minimal suatu proyek dapat dilaksanakan. Suatu keterlambatan pada salah satu aktivitas yang terletak di lintasan kritis akan berpengaruh pula pada lama pelaksanaan seluruh proyek. Lintasan kritis dapat diurut melalui event-event yang mempunyai slack O, pada gambar 11 lintasan ini adalah event 1—2—5. Dengan diketahuinya lintasan kritis pihak manajemen dapat mengawasi dengan ketat aktivitas-aktivitas tertentu untuk menjamin selesainya proyek pada waktunya.

NETWORK DENGAN LAMA PELAKSANAAN YANG "FUZZY".

Dasar Pertimbangan Pemakaian Operasi-operasi "fuzzy".

Perhitungan $\tilde{T}_{Aj}$.

Sama seperti pada CPM biasa pada network inipun dapat dihitung waktu paling dini suatu event-j dapat terealisir:

$$\tilde{T}_{Aj} = \tilde{T}_{Ai} + \tilde{t}_{i,j} \qquad (1)$$

Dari event-i yang "fuzzy" dikerjakan aktivitas i—j yang lama pelaksanaannya juga "fuzzy", sehingga seperti diharapkan, realisasi event—j juga merupakan bilangan "fuzzy", malahan dengan penyebaran yang lebih besar.

Bila pada event-j berakhir beberapa aktivitas maka event-j terealisir pada saat $\tilde{T}_{Aj}$, segera sesudah semua aktivitas yang berakhir pada event-j yaitu $i_I - j, i_2 - j, \ldots\ldots, i_{max} - j$ telah selesai, jadi :

$$\tilde{T}_{Aj} = \widetilde{\max_{i}} (\tilde{T}_{Ai} + \tilde{t}_{i,j}) \tag{2}$$

dimana untuk :

$$\tilde{T}_i = \tilde{T}_{Ai} + \tilde{t}_{i,j} \qquad \text{dan}$$

$$I = \left\{ i_1, i_2, \ldots\ldots\ldots, i_{max} \right\}$$

maka simbol $\widetilde{\max_{i}} (\tilde{T}_i)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\widetilde{\max_{i}} (\tilde{T}_i) = \widetilde{\max} (\tilde{T}_{i1}, \tilde{T}_{i2}, \ldots\ldots\ldots, \tilde{T}_{imax}) \tag{3}$$

Pada dasarnya Gazdik [1] berhenti sampai di sini dan melanjutkan pencarian lintasan kritis dengan enumerasi panjang lintasan. Tulisan ini menempuh cara yang lebih konvensional dengan menghitung $\tilde{T}_{Li}$ dan $\tilde{s}_i$ akan tetapi menemukan hasil-hasil baru yang analogis dengan CPM.

Perhitungan $\tilde{T}_{Li}$.

Perhitungan waktu paling lambat terjadinya event-i yang masih diizinkan $\tilde{T}_{Li}$ memerlukan pemikiran lebih mendalam mengenai pemakaian bilangan "fuzzy" pada network. Karena itu akan kita lihat dua buah network elementer untuk perhitungan $\tilde{T}_{Li}$. Network pertama (gambar 13) hanya terdiri dari satu aktivitas yaitu aktivitas i—e dengan lama pelaksanaan $\tilde{t}_{i,e} = (t, \alpha, \beta)$. Saat dimulainya proyek adalah waktu tertentu, diambil $\tilde{T}_{Ai} = (0,0) = 0$ dan $\tilde{T}_{Ae}$ dapat dihitung dari (1) :

$$\tilde{T}_{Ae} = \tilde{T}_{Ai} + \tilde{t}_{i,e} = \tilde{t}_{i,e}$$

Proyek akan selesai pada suatu waktu yang belum tentu kapan tetapi saat tersebut diberikan oleh $\tilde{t}_{i,e}$. Kita hitung kini $\tilde{T}_{Li}$ agar event—e terjadi menurut bilangan "fuzzy" $\tilde{t}_{i,e}$. Untuk maksud ini terlebih dulu ditetapkan $\tilde{T}_{Le} = \tilde{T}_{Ae}$ dan bila dipakai operasi selisih maka :

$$\tilde{T}_{Li} = \tilde{T}_{Le} - \tilde{t}_{i,e} = \tilde{t}_{i,e} - \tilde{t}_{i,e} = \tilde{0}_{t_{i,e}}$$

Jadi dari harga $\tilde{T}_{Ai} = (0,0)$ kini terdapat penyebaran berupa bilangan "fuzzy" $\tilde{T}_{Li} = (0, \alpha + \beta$). Apa yang dilakukan di atas ini pada dasarnya adalah anggapan bahwa bilangan "fuzzy" untuk perhitungan $\tilde{T}_{Ae}$ dan untuk perhitungan $\tilde{T}_{Li}$ adalah dua bilangan "fuzzy" yang berlainan, tak tergantung satu dengan yang lainnya. Sesungguhnya bilangan "fuzzy", yang meskipun "fuzzy" adalah tetap bilangan yang itu-itu juga. Konsekwensi hal ini adalah operasi selisih dalam hal ini semestinya menghasilkan $\tilde{T}_{Li}$ sama dengan $\tilde{T}_{Ai}$.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa perlu diambil tindakan sebagai berikut :

Ketentuan — 1.

Bila dalam perhitungan $\tilde{T}_{Li}$ dijumpai bilangan "fuzzy"

$$\tilde{O}_A = \tilde{A} - \tilde{A}$$

maka berarti bilangan "fuzzy" $\tilde{A}$ yang sama telah dipakai dua kali dalam perhitungan, sekali dalam perhitungan ke depan dan sekali dalam perhitungan mundur, dan karena itu bilangan "fuzzy" $\tilde{O}_A$ tersebut perlu dibuat sama dengan nol :

$$\tilde{O}_A \longrightarrow O$$

Atas dasar pertimbangan di atas maka operasi selisih untuk bilangan "fuzzy" tak dapat begitu saja dipakai menggantikan operasi selisih untuk bilangan biasa. Pemakaian operasi selisih untuk bilangan "fuzzy" tanpa memperhatikan ketentuan-1 akan menghasilkan saat paling lambat terjadinya event yang masih diizinkan $\tilde{T}_{Li}$ yang mempunyai penyebaran-penyebaran sangat besar di luar penyebaran yang dapat terjadi pada event-i bila lama pelaksanaan aktivitas i—j yaitu $T_{i,j}$ (bilangan biasa) berobah menurut $\tilde{t}_{i,j}$.

Sebagai catatan perlu diingatkan bahwa tidak ada bilangan "fuzzy" $\tilde{A}$ yang memenuhi persamaan :

$$\tilde{A} + \tilde{B} = O$$

Sedang pemakaian ketentuan — 1 akan menghasilkan hal yang berlawanan seperti terlihat misalnya :

$$\tilde{A} + \tilde{B} - \tilde{B} = -\tilde{B}$$

$$\tilde{A} + \tilde{O}_B = -\tilde{B}$$

Kalau $\tilde{O}_B$ $--\to$ O maka kini $\tilde{A} = -\tilde{B}$. Karena itu sekali lagi ditegaskan bahwa operasi $\tilde{O}_A \to$ O hanya dipakai pada perhitungan $\tilde{T}_{Li}$ dan tidak bisa dipakai secara umum. Sebab pada dasarnya apa yang dilakukan adalah penentuan selisih secara selektip : bagi bilangan "fuzzy" yang sama (bilangan itu sendiri) dipakai operasi selisih "biasa" dan selain itu tetap dipakai operasi selisih "fuzzy".

Operasi selisih dimana dipakai ketentuan — 1 diberi simbol $\ominus$ sebagai ganti —. Dengan demikian maka untuk event — i yang tak bercabang maka dapat ditulis :

$$\tilde{T}_{Li} = \tilde{T}_{Lj} \ominus \tilde{t}_{i,j} \tag{4}$$

Bila event — i merupakan pangkal beberapa aktivitas $i-j_1$, $i-j_2$, ... $i-j_{max}$ maka perhitungan $\tilde{T}_{Li}$ menjadi lebih rumit, tetapi pada dasarnya adalah tetap :

$$\tilde{T}_{1i}{}^* = \underset{j}{\widetilde{\min}}\,(T_{Lj} \ominus \tilde{t}_{i,j}) \tag{5}$$

dimana definisi $\widetilde{\min}$ analogis dengan $\widetilde{\max}$ pada (3). Pemakaian $\tilde{T}_{Li}{}^*$ sebagai waktu paling lambat yang masih diizinkan bagi event — i belum memuaskan, karena terjadi penyebaran-penyebaran yang tidak realistis pada harga-harga $\tilde{T}_{Li}{}^*$

Apabila rumus di atas diterapkan pada network kedua (gambar 14) yang terdiri dari dua aktivitas i — e dan j — e serta sebuah dummy i — j, maka menurut (2), (4) dan (5) didapat :

$$\tilde{T}_{Li}{}^* = \widetilde{\min} \left\{ \widetilde{\max}\,(\tilde{t}_{j,e} - \tilde{t}_{i,e}, O), \widetilde{\max}\,(\tilde{t}_{i,e} - \tilde{t}_{j,e}, O) \right\}$$

Misalkan $\tilde{\Delta}^* = \tilde{t}_{i,e} - \tilde{t}_{j,e}$ adalah bilangan "fuzzy" positip, maka $-\tilde{\Delta}^* = \tilde{t}_{j,e} - \tilde{t}_{i,e}$ adalah negatip dan dapat ditunjukkan bahwa $\tilde{T}_{Li}{}^* = O$. Misalkan sekarang $\tilde{\Delta}^* = (\Delta^*, \alpha, \beta)$, $\tilde{\Delta}^* > O$ merupakan bilangan "fuzzy" nol, maka yang dibandingkan untuk perhitungan $\tilde{T}_{Li}{}^*$ adalah $\widetilde{\max}\,(\tilde{\Delta}^*, 0)$ dan $\widetilde{\max}\,(-\tilde{\Delta}^*, 0)$. Harga $\tilde{T}_{Li}$ tidak bisa negatip, sehingga bagiannya yang negatip, bila muncul perlu dibuang. Pada $\widetilde{\max}$ ($(\tilde{\Delta}^*\ \ 0)$ calon untuk $\tilde{T}_{Li}$ ini telah dipotong bagiannya yang negatip, sedang pada $\widetilde{\max}\,(-\tilde{\Delta}^*, 0) = -\widetilde{\min}\,(\tilde{\Delta}^*, 0)$, bagian yang terpotong tadi muncul lagi dalam bentuk negatipnya, bagian ini menambah penyebaran pada $\tilde{T}_{Li}{}^*$ dan karena itu perlu suatu simetri : bila $\tilde{\Delta} = \widetilde{\max}\,(\tilde{\Delta}^*, 0)$ maka $\tilde{\Delta}^*$ pada $\widetilde{\max}\,(-\tilde{\Delta}^*, 0)$ harus digantikan dengan $\underset{\sim}{\tilde{\Delta}}$

Bila event–i merupakan pangkal dari beberapa aktivitas maka aktivitas-aktivitas ini dan urutan aktivitas selanjutnya membentuk lintasan-lintasan. Pasangan dua lintasan akan bertemu kembali misalnya pada event–k, dimana event–k setidak-tidaknya adalah event akhir e. Sebut kedua lintasan itu lintasan–1 dan lintasan–2. Lintasan–1 dimulai dari event–i menurut event–k, setelah itu pada event–k kita bisa meneruskan lintasan–1 berlawanan dengan arah anak panah pada lintasan–2 sampai akhirnya tiba pada event–i kembali. Hal yang sama dapat dilakukan pada lintasan-lintasan sehingga didapat dua lintasan tertutup yaitu lintasan tertutup–1 dan lintasan tertutup–2.

Pada lintasan tertutup–1 didapat komponen yang akan dibandingkan pada perhitungan $\tilde{T}_{Li}$* :

$$\widetilde{\max}\,(\tilde{T}_{Ai} + \tilde{\Delta}\,*)$$

dan pada lintasan tertutup–2 :

$$\widetilde{\max}\,(\tilde{T}_{Ai} - \tilde{\Delta}\,*)$$

dimana :

$$\tilde{\Delta}\,* = \sum_{p,q \in I_{pq}} t_{p,q} - \sum_{r,s \in I_{rs}} t_{r,s} \quad \text{dan } a > 0 \text{ untuk } \mu_{\tilde{\Delta}\,*}(a) = 1$$

I_{pq} dan I_{rs} adalah himpunan pasangan-pasangan event yang terletak pada lintasan–1 dan lintasan–2.

Kini dapat dibuat pernyataan berikut :

Ketentuan–2:
Untuk perhitungan $\tilde{T}_{Li}$ harus diambil bagian $\tilde{\Delta}$ * yang positip saja yaitu: $\tilde{\Delta}$ = max ($\tilde{\Delta}$ *, 0) dan – $\tilde{\Delta}$ * harus digantikan dengan – $\tilde{\Delta}$

Dengan memakai ketentuan-ketentuan maka pada perhitungan $\tilde{T}_{Li}$ berlaku :

$$\tilde{T}_{Li} = \widetilde{\min}\left\{ \widetilde{\max}\,(\tilde{T}_{Ai}, \tilde{T}_{Ai} + \tilde{\Delta}),\ \widetilde{\max}\,(\tilde{T}_{Ai}, \tilde{T}_{Ai} - \tilde{\Delta}) \right\} = \tilde{T}_{Ai} \qquad (6)$$

Hal ini dapat dengan mudah dibuktikan sebagai berikut : Karena pada $\widetilde{\max}$ dan $\widetilde{\min}$ berlaku hukum distributip, maka :

$$\tilde{T}_{Li} = \widetilde{\max}\left\{ \tilde{T}_{Ai}, \widetilde{\min}\,(\tilde{T}_{Ai} + \tilde{\Delta}, \tilde{T}_{Ai} - \tilde{\Delta}) \right.$$

Menurut ketentuan—2 $\widetilde{\Delta}$ adalah bilangan "fuzzy" positip, maka :

$$\widetilde{T}_{Li} = \widetilde{\max} \left\{ \widetilde{T}_{Ai}, \widetilde{T}_{Ai} - \widetilde{\Delta} \right\} = \widetilde{T}_{Ai}$$

Jadi sebagai konsekwensi ketentuan—2, maka pasangan dan $-\widetilde{\Delta}$ harus diabaikan dalam perhitungan $\widetilde{T}_{Li}$.

Misalkan kini pada salah satu lintasan—1 atau lintasan—2 terdapat event—n pertemuan dengan lintasan—3 yang bukan berasal dari event—i. Ungkapan untuk $\widetilde{T}_{Li}$ kini akibat pengaruh lintasan—3 adalah :

$$\widetilde{T}_{Li}^{*} = \widetilde{\min} \left\{ \widetilde{\max}(\widetilde{T}_{Ai}, \widetilde{T}_{Ai} + \widetilde{\Delta}, \widetilde{P}), \widetilde{\max}(\widetilde{T}_{Ai}, \widetilde{T}_{Ai} - \widetilde{\Delta}, \widetilde{Q}) \right\} \quad (7)$$

dimana $\widetilde{P}$ dan $\widetilde{Q}$ adalah jumlah waktu pelaksanaan aktivitas pada lintasan—3 dan sebagian lintasan—1 atau lintasan—2. Karena pada (6) ungkapan-ungkapan $\widetilde{T}_{Ai} + \widetilde{\Delta}$, $\widetilde{T}_{Ai} - \widetilde{\Delta}$ tidak perlu diperhitungkan maka hal yang sama harus dilakukan pada (7). Pada umumnya jika

$$\widetilde{T}_{Li}^{*} = \widetilde{\min} \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\max}(\widetilde{T}_{Ai}, \widetilde{T}_{Ai} + \widetilde{\Delta}_{1}, \ldots\ldots \quad , \widetilde{T}_{Ai} + \widetilde{\Delta}_{n}, \widetilde{P}_{1}), \\ \widetilde{\max}(\widetilde{T}_{Ai}, \widetilde{T}_{Ai} - \widetilde{\Delta}_{n}, \ldots\ldots \quad , \widetilde{T}_{Ai} + \widetilde{\Delta}_{\ell}, \widetilde{P}_{\ell}), \\ \widetilde{\max}(\widetilde{T}_{Ai}, \widetilde{T}_{Ai} - \widetilde{\Delta}_{\ell}, \ldots\ldots \quad , \widetilde{T}_{Ai} - \widetilde{\Delta}_{1}, \widetilde{P}_{m}) \end{array} \right.$$

maka ungkapan-ungkapan $\widetilde{T}_{Ai} + \widetilde{\Delta}$, $\widetilde{T}_{Ai} - \widetilde{\Delta}$ tidak perlu diperhitungkan dan harus dibuang, sehingga perhitungan untuk $\widetilde{T}_{Li}$ menjadi jauh lebih sederhana yaitu: 2)

$$\widetilde{T}_{Li} = \widetilde{\min_{\ell}} \left\{ \widetilde{\max} (\widetilde{T}_{Ai}, \widetilde{P}_{\ell}) \right\} \quad (8)$$

dimana $\ell \in \{1, 2, \ldots\ldots\ m\}$, m = jumlah aktivitas yang keluar dari ev en t — i .

Perhitungan slack $\widetilde{s}_i$.

Dengan tersedianya $\widetilde{T}_{Ai}$ dan $\widetilde{T}_{Li}$ maka dapat dihitung slack pada event—) :

$$\widetilde{s}_i^{*} = \widetilde{T}_{Li} - \widetilde{T}_{Ai}$$

Misalnya event akhir e merupakan selesainya satu aktivitas saja sebut aktivitas i—e. Setelah penentuan $\tilde{T}_{Le} = \tilde{T}_{Ae}$ maka $\tilde{T}_{Li} = \tilde{T}_{Le} \ominus \tilde{t}_{i,e} = \tilde{T}_{Ai} + \tilde{t}_{i,e} - \tilde{t}_{i,e} = \tilde{T}_{Ai}$ menurut ketentuan—1. Jadi slack pada event—i : $\tilde{s}_i = \tilde{T}_{Li} - \tilde{T}_{Ai} = \tilde{T}_{Ai} - \tilde{T}_{Ai} = 0_{TAi} = 0$

Pada event yang tidak khusus seperti di atas maka perhitungan slack tidak sesederhana seperti ini karena ada perbedaan bentuk fungsi keanggotaan $\tilde{T}_{Li}$ dan $\tilde{T}_{Ai}$. Apabila langsung dipakai operasi — tanpa memperhatikan ketentuan—1 maka didapat harga-harga slack yang tidak realistis. Karena itu $\tilde{T}_{Li}$ dan $\tilde{T}_{Ai}$ harus diuraikan dalam komponen-komponennya sehingga dalam menghitung slack dapat diketahui komponen mana saja yang bisa dihilangkan menurut ketentuan—1. Selanjutnya setelah komponen yang bersangkutan dihilangkan maka didapat slack yang besarnya merupakan bilangan "fuzzy" positip atau bilangan "fuzzy" nol. Bila slack suatu event—i termasuk bilangan "fuzzy" nol maka hal ini berarti bukan hanya tidak ada waktu untuk menunda dimulainya aktivitas i—j misalnya, tetapi lebih dari itu kita sudah terhutang waktu untuk memulai semua aktivitas yang berasal dari event—i ini. Aktivitas i—j sudah harus dimulai padahal aktivitas pendahulunya h—i masih belum selesai. Dalam keadaan sesungguhnya tidak ada slack yang mempunyai harga negatip, jadi dapat disimpulkan bahwa :

Ketentuan—3 :
Bila menurut perhitungan event—i mempunyai slack yang besarnya merupakan bilangan "fuzzy" nol, maka diambil hanya bagiannya yang positip.

$$\tilde{s}_i = \max(\tilde{s}_i^*, 0) \tag{9}$$

Penentuan Lintasan Kritis :

Seperti halnya pada CPM biasa, maka lintasan kritis ditentukan dari besarnya slack pada tiap event. Untuk ini didefinisikan bilangan d_i bagi event—i sebagai berikut :

$$d_i = \begin{cases} \dfrac{\text{luas bidang } \tilde{s}_i^*}{\text{luas bidang } \tilde{s}_i} & \text{bila } \tilde{s}_i \neq 0 \\ 0 & \text{bila } \tilde{s}_i = 0 \end{cases}$$

Dengan demikian dapat disebutkan bahwa : *Lintasan kritis ditentukan oleh event-event yang mempunyai $d_i < 1$* Semakin kecil d_i semakin besar keterlibatan event—i pada lintasan kritis.

Satu lagi besaran perlu didefinisikan walaupun hal ini agak membuat d_i sedikit redundant :

$$h_i = \begin{cases} 0 & \text{bila } s_i \text{ bilangan "fuzzy" positip} \\ \mu_{\tilde{s}_i}(0) & \text{bila } s_i \text{ bilangan "fuzzy" nol dan } \mu_{\tilde{s}i}(a) = 1 \text{ untuk } a > 0 \\ 1 & \text{bila } s_i = 0 \text{ atau } \tilde{s}_i \text{ bilangan "fuzzy" nol} \\ & \quad \text{dan } \mu_{\tilde{s}i}(a) = 1 \text{ untuk } a < 0 \end{cases}$$

Besaran h diperlukan untuk penentuan kadar keterlibatan event—i pada lintasan kritis, yaitu bila pada suatu tingkat (level) α berlaku $\alpha > h_i$ maka event—i tidak lagi terletak pada lintasan kritis.

b. Contoh Perhitungan.

Kita lihat kembali network pada gambar 9. Kini tidak dijumpai lagi adanya kepastian mengenai lama pelaksanaan aktivitas, tidak pula ada kemewahan berupa data statistik untuk menentukan distribusi lama pelaksanaan aktivitas. Lama pelaksanaan aktivitas i—j yaitu $t_{i,j}$ hanya bisa ditaksir besarnya :

$t_{i,j}$ = "kira-kira t, antara t — α dan t + β "

Untuk memudahkan perhitungan dalam contoh ini diambil $\alpha = \beta$ = 1 unit waktu (hari). Untuk masing-masing aktivitas diberikan :

$\tilde{t}_{1,2} = \tilde{a} = (4,1)$ $\tilde{t}_{3,4} = \tilde{e} = (3,1)$

$\tilde{t}_{2,5} = \tilde{b} = (9,1)$ $\tilde{t}_{1,4} = \tilde{f} = (8,1)$

$\tilde{t}_{2,4} = \tilde{c} = (2,1)$ $\tilde{t}_{4,5} = \tilde{g} = (3,1)$

$\tilde{t}_{2,3} = \tilde{d} = (2,1)$

Sama seperti pada Bab III — C maka di sinipun dihitung $\tilde{T}_{Aj}$. Dari data yang diberikan di atas dan rumus-rumus maka :

$\tilde{T}_{A1} = (0,0)$

$\tilde{T}_{A2} = \tilde{T}_{A1} + \tilde{a} = (0,0) + (4,1) = (4,1)$

$\tilde{T}_{A3} = \tilde{T}_2 + \tilde{d} = (4,1) + (2,1) = (6,2)$

$\tilde{T}_{A4} = \widetilde{\max}\,(\tilde{T}_{A2} + \tilde{c}, \tilde{T}_{A3} + \tilde{e}, \tilde{T}_{A1} + \tilde{f})$

$$= \widetilde{\max}\,((6,2),(9,3),(8,1))$$

$$\tilde{T}_{A5} = \widetilde{\max}\,((4,1) + (9,1), \tilde{T}_{A4} + (3,1))$$

Hasil perhitungan terlihat pada gambar 12, dimana selesainya proyek adalah "kira-kira 13 hari, antara 11 sampai 16 hari". Hasil ini bisa diinterpretasi sebagai berikut :

Ada kombinasi lama pelaksanaan aktivitas sedemikian sehingga proyek akan selesai dalam 11 hari. Salah satu kombinasi ini misalnya bila semua aktivitas selesai secepat mungkin (aktivitas 1—2 selesai dalam 3 hari, aktivitas 2—5 dalam 8 hari dan seterusnya). Sebaliknya ada pula kombinasi lama pelaksanaan aktivitas sehingga proyek baru selesai dalam 16 hari, misalnya bila semua aktivitas selesainya lambat (aktivitas 1—2 selesai dalam 5 hari dan seterusnya). Semua kombinasi lainnya yang bisa terjadi akan menghasilkan lama pelaksanaan proyek antara 11 — 16 hari.

Waktu paling lambat sebuah event masih diizinkan terjadi $\tilde{T}_{Li}$ dihitung dari rumus (4) dan (8) :

$$\tilde{T}_{L5} = \tilde{T}_{A5}$$

$$\tilde{T}_{L4} = \tilde{T}_{L5} \ominus \tilde{g} = \widetilde{\max}\left\{(\tilde{a}+\tilde{b}-\tilde{g}),(\tilde{a}+\tilde{c}),(\tilde{a}+\tilde{d}+\tilde{e}),\tilde{f}\right\}$$

$$\tilde{T}_{L3} = \tilde{T}_{L4} \ominus \tilde{e} = \widetilde{\max}\left\{(\tilde{a}+\tilde{b}-\tilde{g}-\tilde{e}),(\tilde{a}+\tilde{c}-\tilde{e}),(\tilde{a}+\tilde{d}),(\tilde{f}-\tilde{e})\right\}$$

$$\tilde{T}_{L2} = \widetilde{\min}\,(\tilde{T}_{L5} \ominus \tilde{b}, \tilde{T}_{L4} \ominus \tilde{c}, \tilde{T}_{L3} \ominus \tilde{d})$$

$$= \widetilde{\min}\left\{\widetilde{\max}(\tilde{a},(\tilde{f}+\tilde{g}-\tilde{b})),\widetilde{\max}(\tilde{a},(\tilde{f}-\tilde{c})),\widetilde{\max}(\tilde{a},(\tilde{f}-\tilde{e}-\tilde{d}))\right\}$$

$$\tilde{T}_{L1} = 0$$

Substitusi harga-harga untuk $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{d}$, $\tilde{e}$, $\tilde{f}$, dan $\tilde{g}$ menghasilkan bilangan-bilangan "fuzzy" seperti terlihat pada gambar 15. Kini dapat dihitung slack :

$$\tilde{s}_5 = 0 \qquad\qquad \tilde{s}_1 = 0$$

$$\tilde{s}_4 = \tilde{T}_{L4} \ominus \tilde{T}_{A4} = \widetilde{\min}\left\{(\tilde{b}-\tilde{g}-\tilde{d}-\tilde{e}),(\tilde{a}+\tilde{b}-\tilde{g}-\tilde{f})\right\}$$

$$\tilde{s}_3 = \tilde{T}_{L3} \ominus \tilde{T}_{A3} = \widetilde{\max}\left\{(\tilde{c}-\tilde{e}-\tilde{d}),(\tilde{f}-\tilde{e}-\tilde{a}-\tilde{d}),(\tilde{b}-\tilde{g}-\tilde{e}-\tilde{d})\right\}$$

$$\tilde{s}_2 = \tilde{T}_{L2} \ominus \tilde{T}_{A2} = \widetilde{\min}\left\{(\tilde{f}+\tilde{g}-\tilde{b}-\tilde{a}),(\tilde{f}-\tilde{c}-\tilde{a}),(\tilde{f}-\tilde{e}-\tilde{d}-\tilde{a})\right\}$$

dan besaran di :

$$d_5 = 0 \quad d_4 = 23/32 \quad d_3 = 23/32 \quad d_2 = 1/8 \quad d_1 = 0$$

Dari data di atas maka lintasan kritis adalah lintasan yang melalui event-event 1—2—5 dan 1—2—3—4—5. Bagaimana dengan lintasan yang melalui event-event 1—4—5? Untuk dapat menjawab hal ini maka network digambar kembali dengan penambahan event 6,7 dan 8 (gambar 17). Bagi ketiga event baru ini :

$$\tilde{s}_6^* = (-1,4) \quad \tilde{s}_7^* = (4,3) \quad \tilde{s}_8^* = (2,4)$$

dan besaran di :

$$d_6 = 9/32 \quad d_7 = 1 \quad d_8 = 7/8$$

Kini terlihat bahwa semua lintasan dapat merupakan lintasan kritis, tetapi tentu saja dengan kadar yang berbeda-beda. Ini terlihat dari besar-besaran h_l :

$$h_1 = h_2 = h_5 = h_6 = 1$$

$$h_3 = 3/4 \quad h_4 = 3/4 \quad h_7 = 0 \quad h_8 = 1/2$$

Hal ini berarti misalnya untuk event—7 : Berapapun harga lama pelaksanaan aktivitas dalam network, sejauh ia masih memenuhi penyebaran yang diberikan oleh bilangan "fuzzy" $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{d}$, $\tilde{e}$, $\tilde{f}$ dan $\tilde{g}$, maka event—7 tidak akan terletak pada lintasan kritis. Lintasan-lintasan kritis adalah yang melalui event1—2—6—5, 1—2—3—4—5 dan 1—8—4—5. Pada tingkat 1/2 ke atas maka event—8 tidak lagi terletak pada lintasan kritis. Pada tingkat 1/2 harga-harga lama pelaksanaan aktivitas terletak pada interval-interval berikut :

$$t_{1,2} = [4-0.5\,,\,4+0.5]$$

$$t_{2,5} = [9-0.5\,,\,9+0.5]$$

$$t_{2,4} = [2-0.5\,,\,2+0.5]$$

dan seterusnya.

Diatas tingkat 3/4 maka event—3 dan event—4 tidak pula terletak pada lintasan kritis. Pada tingkat 3/4 maka interval yang bersangkutan adalah :

$t_{1,2} = [4-0{,}25\ ,\ 4+0{,}25]$

$t_{2,5} = [9-0{,}25\ ,\ 9+0.25]$

$t_{2,4} = [2-0.25\ ,\ 2+0.25]$
dan seterusnya.

Untuk tingkat 1 maka hasil yang didapat diredusir menjadi hasil seperti pada bab IV—c, yaitu hasil CPM biasa. Interval di sini menciut menjadi titik yaitu :

$t_{1,2} = 4 \quad t_{2,5} = 9 \quad t_{2,4} = 2$ dan seterusnya.

Dari contoh yang terlihat jelas keunggulan metoda yang dikemukakan.

c. Catatan Tentang Pemakaian.

Begitu proyek dimulai, network/analisa lintasan kritis ini sangat berguna, seperti halnya pada CPM biasa, untuk monitoring kemajuan proyek. Bila suatu aktivitas telah selesai maka perlu dilihat apakah ia masih mengikuti fungsi keanggotaan bilangan "fuzzy" lama pelaksanaan aktivitasnya. Di luar hal-hal yang disebutkan ini maka perlu dihitung kembali lintasan kritis dengan tambahan informasi mengenai aktivitas-aktivitas yang telah selesai. Lama pelaksanaan aktivitas-aktivitas yang telah selesai ini adalah bilangan biasa atau bilangan "fuzzy" yang "crisp" (jadi penyebaran $\alpha = \beta = 0$).

Penentuan fungsi keanggotaan bilangan "fuzzy" dilakukan dengan taksiran berdasar. Sebagai contoh : Suatu aktivitas untuk mentest subsistem yang tidak esensil katakanlah pada sebuah prototype pesawat terbang. Aktivitas ini terdiri dari :

— kontrol wiring apakah sudah betul (W)
— Trouble shooting bila ada kelainan dan perbaikan (TS)
— functional test sesuai prosedur (FT)

Tenaga ahli yang akan melaksanakan test mencurigai wiring masih belum betul, tetapi ia diberi tahu bahwa hanya tersedia waktu terbatas (t hari) untuk pelaksanaan tugasnya. Bila batas ini dilampaui maka selesai atau tidak, test akan dihentikan dan dikerjakan pada kesempatan lain. Lama pelaksanaan aktivitas di sini adalah :

$$\tilde{T} = \tilde{t}_W + \tilde{t}_{TS} + \tilde{t}_{FT}$$

Bila $\tilde{t}_W$, $\tilde{t}_{TS}$ dan $\tilde{t}_{FT}$ merupakan bilangan-bilangan "fuzzy" segitiga maka $\tilde{T}$ juga bilangan "fuzzy" segitiga $\tilde{T} = (T, \alpha)$. Bila $T - \alpha < t < T + \alpha$ maka akan didapat fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{T}}$ bentuk segitiga terpotong pada t, sedangkan bila $t \geq T + \alpha$ maka fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{T}}$ berbentuk segitiga penuh.

Perhatikan bahwa bila menurut tenaga ahli wiring ditaksir sudah betul tetapi untuk memperhitungkan kalau-kalau ada trouble shooting, maka bentuk fungsi keanggotaan dapat diperhitungkan sebagai berikut :

$$\tilde{T} = \tilde{t}_W + \tilde{t}_{FT} = (T', \alpha')$$

Karena kini $t > T' + \alpha'$ maka masih tersisa waktu untuk trouble shooting bilamana diperlukan dan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{T}}$ kini berbentuk :

$$\tilde{T} = (T', \alpha', t - T')$$

Pada umumnya bentuk fungsi keanggotaan cukup diberikan secara kira-kira saja.4)

KESIMPULAN.

Analisa proyek diperlukan untuk mengetahui saling ketergantungan antara aktivitas-aktivitasnya. Dari network yang didapat kemudian bisa ditentukan lintasan krisits meskipun lama pelaksanaan aktivitas diberikan oleh bilangan-bilangan yang tidak jelas besarnya, yaitu bilangan-bilangan "fuzzy".

Cara perhitungan analogis dengan metoda CPM biasa, hanya karena yang dimanipulasi adalah bilangan "fuzzy" maka perlu dipakai operasi-operasi untuk bilangan "fuzzy" yaitu : jumlah, selisih, maximum dan minimum.

Operasi selisih perlu dimodifikasi sehingga selisih bilangan "fuzzy" dengan dirinya sendiri diambil sama dengan naol.

Dibahas pula perhitungan untuk penentuan waktu paling lambat terjadinya event yang masih diizinkan. Hasil yang didapat disamping kesimpulan berupa himpunan lintasan kritis, yang kegunaannya sangat besar bagi monitoring dan pengendalian proyek, juga penyebaran-penyebaran yang bisa terjadi pada waktu paling dini terjadinya event, waktu paling lambat yang masih diizinkan bagi terjadinya event dan penyebaran-penyebaran pada slack. Ketiga hasil yang terakhir ini terdapat berupa bilangan-bilangan "fuzzy". Disamping itu diketahui pula kadar keterlibatan masing-masing lintasan dalam himpunan lintasan kritis. Dari sini manajemen dapat mengambil langkah-langkah bukan hanya mengawasi dengan ketat lintasan kritis, tetapi juga menjaga agar suatu lintasan tidak termasuk lintasan kritis.•

CATATAN KAKI :

1) Gagasan tentang "fuzzy subset" pertama kali dilontarkan oleh Zadeh (4). Pengantar teori "fuzzy subset" yang relatif mudah dicerna terdapat pada (5).

2) Dalam penelitian selanjutnya diketahui bahwa rumus (8) masih belum berlaku secara umum. Ini berkaitan dengan suatu teorema dalam "theory of games" bahwa bagi matriks $A = (a_{ij})$ berlaku

$$\max_i \; \min_j \; a_{ij} \leqslant \min_j \; \max_i \; a_{ij}$$

3) Dalam tulisan berikutnya, pernyataan ini akan dibuktikan.

4) Interval dapat ditafsirkan sebagai generalisasi bilangan, sedang bilangan "fuzzy" sebagai generalisasi interval. Berdasar hal ini maka bentuk fungsi keanggotaan bisa disesuaikan dengan keinginan interval-interval bagaimana yang akan diteliti.

DAFTAR PUSTAKA :

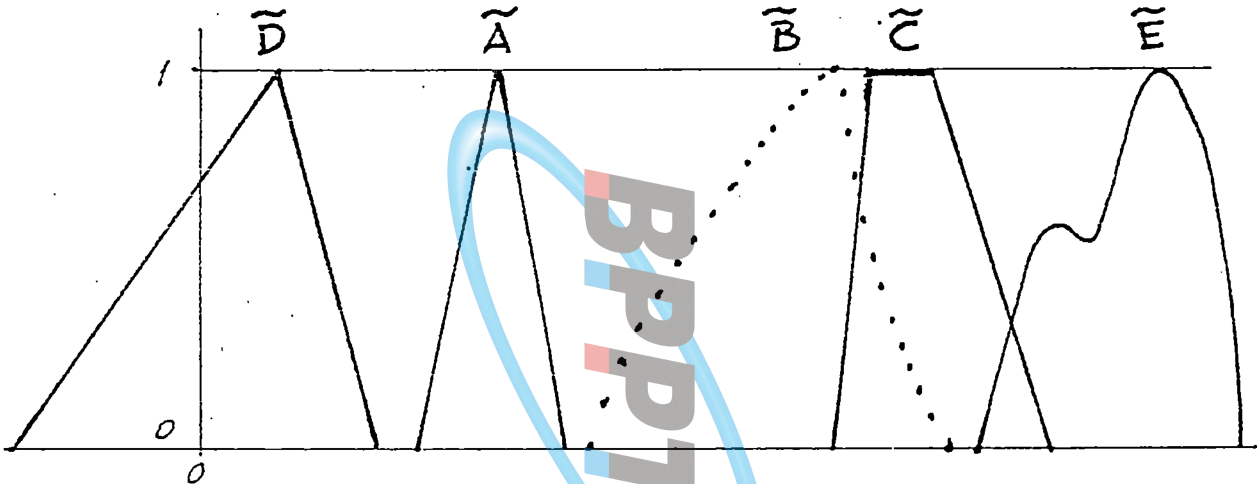
1. Gazdik, I. **"Fuzzy Network Planning — FNET"**. IEEE Transaction on Reliability, Vol. R—32, No. 3, August 1983.

2. Dubois, D. dan Prade, H. **"Decision-Making under fuzzyness"** dalam Gupta, M.M., Ragade, R.K. dan Yager, R.R. (eds.) **"Advances in Fuzzy set Theory and Applications". North — Holland Publishing Company**. Amsterdam, New York, Oxford 1979.

3. Mizumoto, M. dan Tanaka, K. **"Some properties of fuzzy numbers"** dalam buku tersebut pada 2.

4. Zadeh, L. **"Fuzzy Sets"** information and control, Vol. 8, hal. 338—353, 1965.

5. Kaufmann, A. **"Introduction to the Theory of Fuzzy Subset"**, Vol. 1, Academic Press, New York, 1975.



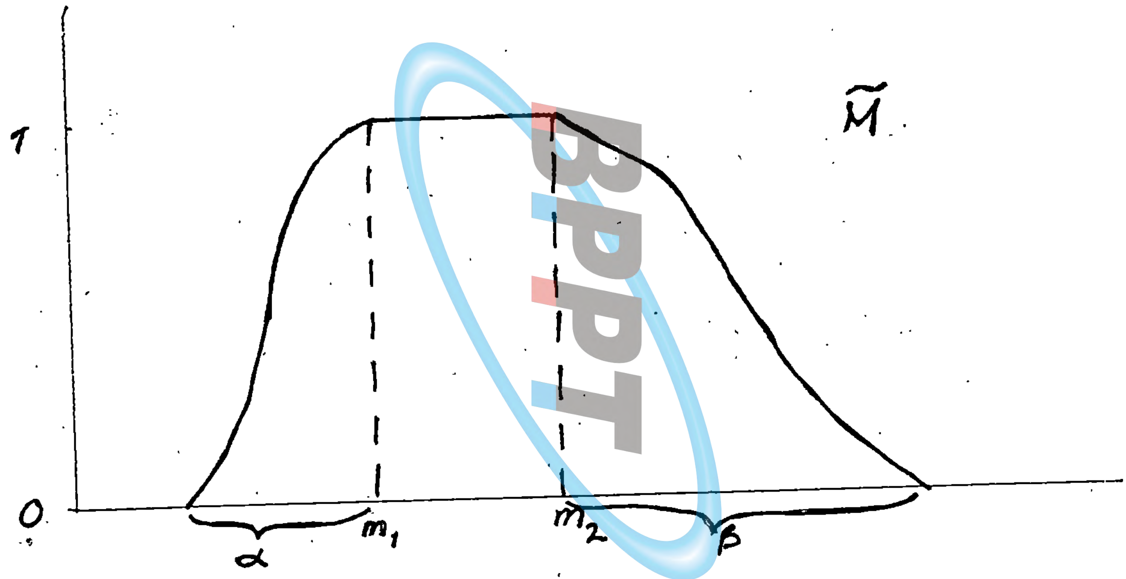
Gambar 1. Contoh-contoh berbagai macam bilangan "fuzzy".

a). Bilangan "fuzzy" konvex $\tilde{A}$.

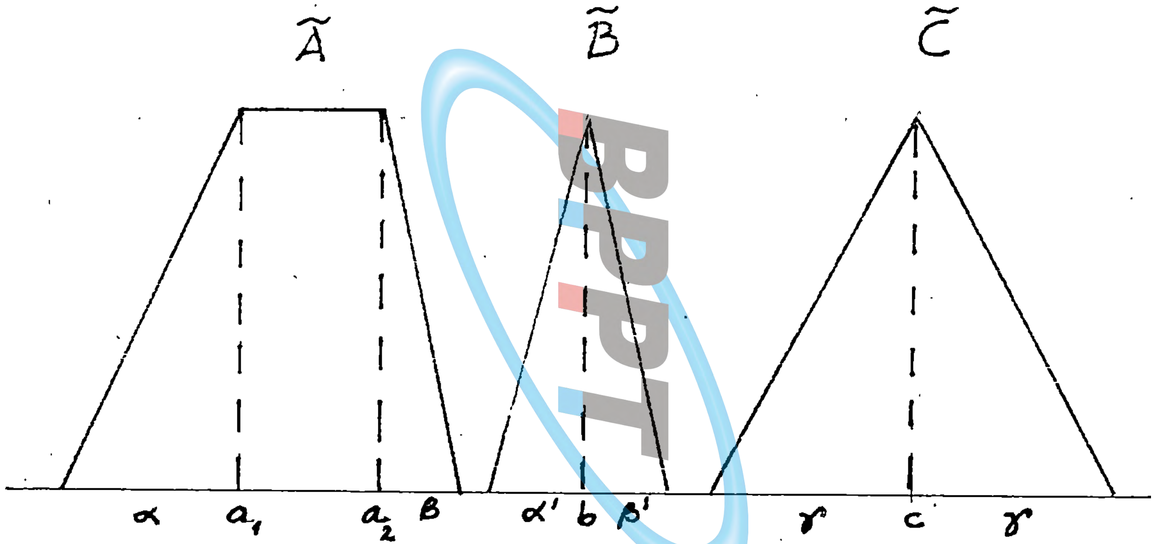
b). Bilangan "fuzzy tak konvex B dan E

c). Bilangan "fuzzy" positip $\tilde{C}$

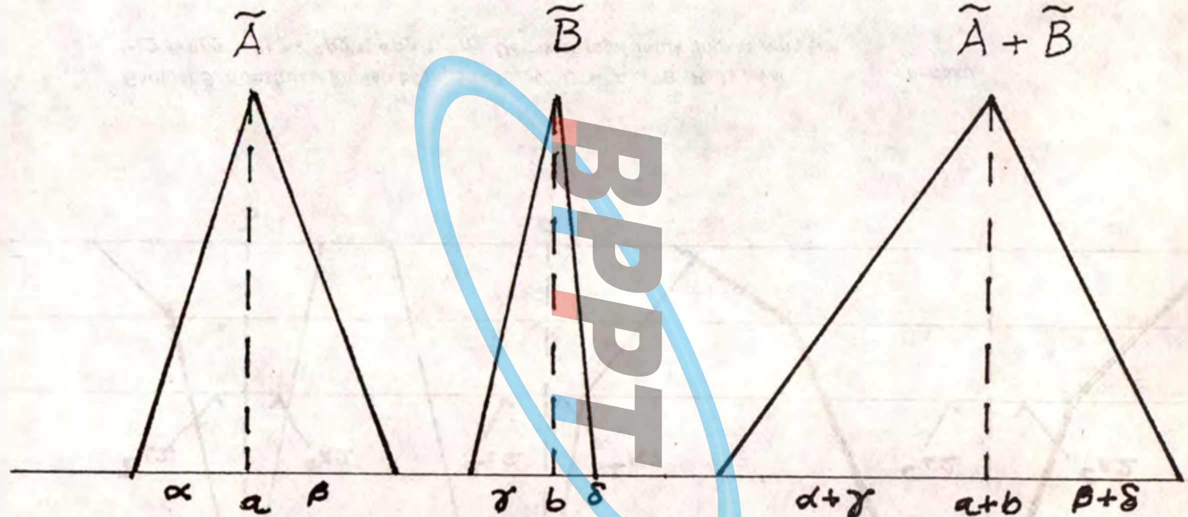
d). Bilangan "fuzzy" nol $\tilde{D}$.



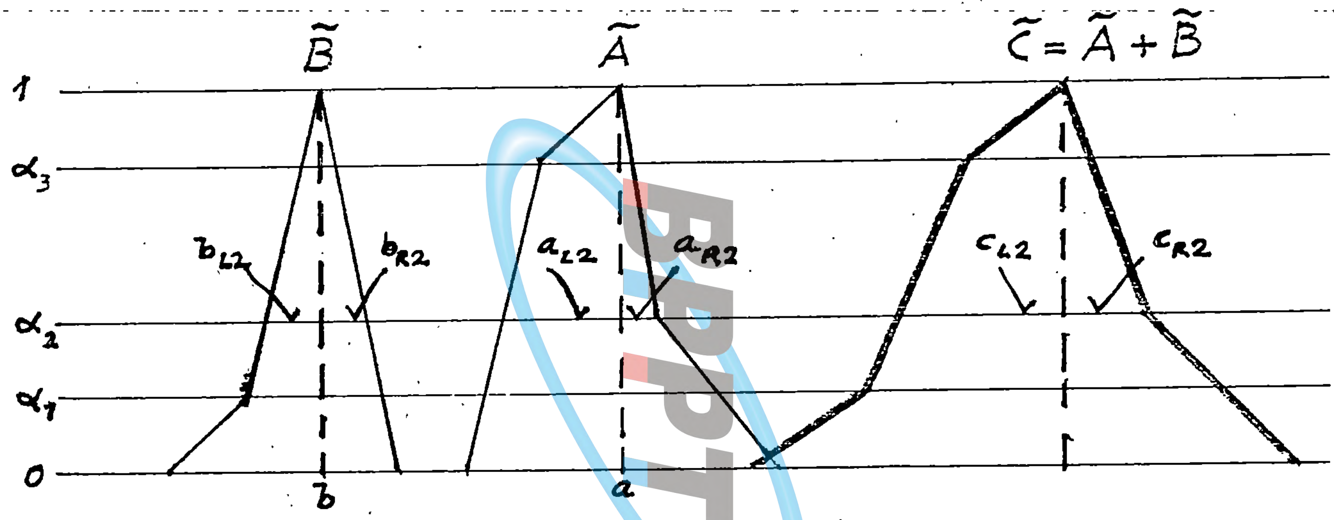
Gambar 2. Representasi bilangan "fuzzy".



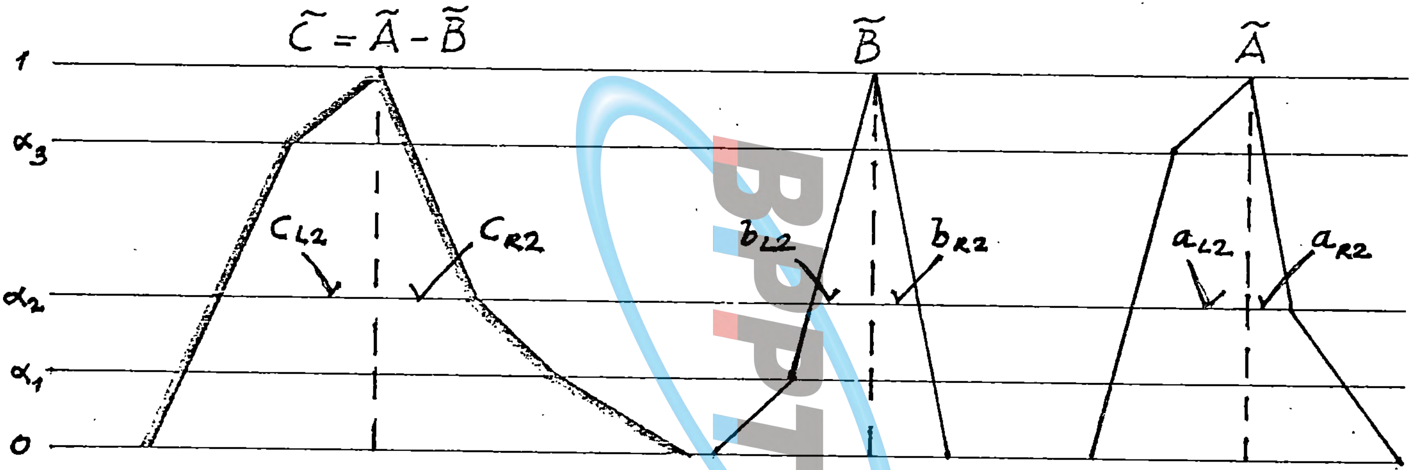
Gamar 3. Parameter-parameter bilangan "fuzzy".
a). Bilangan "fuzzy" trapesium $\tilde{A}$ = (a_1, a_2, α, [illegible]
b). Bilangan "fuzzy" segitiga B = (b, α', [illegible]
c). Bilangan "fuzzy" segitiga sama sisi C = (c, [illegible]



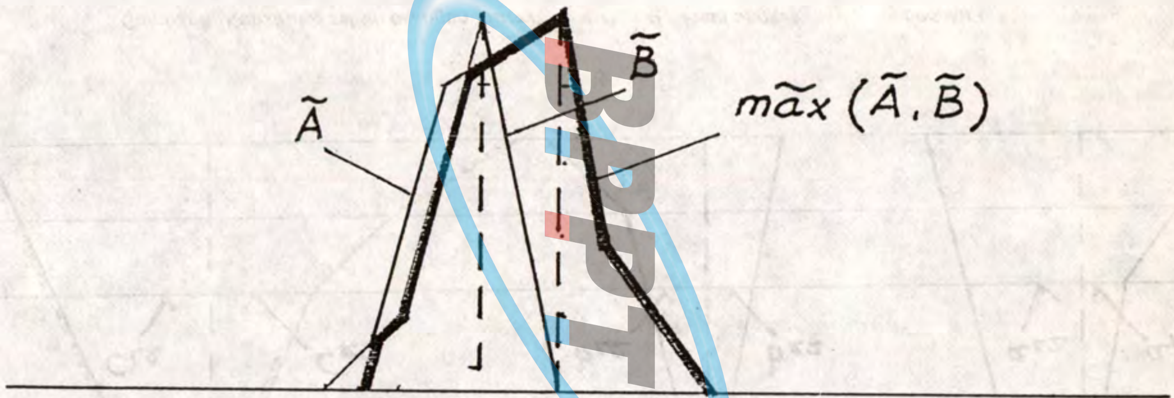
Gambar 4. Jumlah dua bilangan "fuzzy".



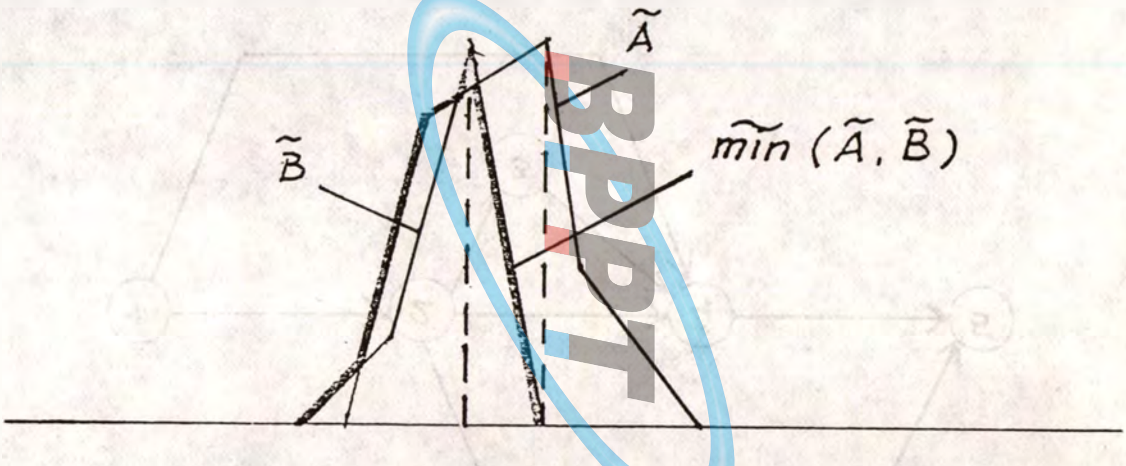
Gambar 5. Konstruksi jumlah bilangan "fuzzy" $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$. Pada level $= \alpha_2$ berlaku : $c_{L2} = a_{L2} + b_{L2}$; $c_{R2} = a_{R2} + b_{R2}$. Demikian juga untuk tingkat yang lain.



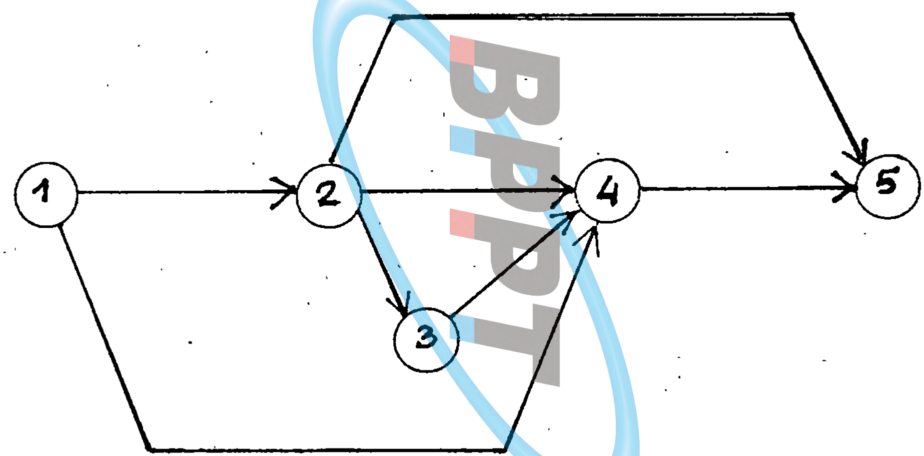
Gambar 6. Konstruksi selisih bilangan "fuzzy" $C = A - B$ Pada tingkat $= \alpha_2$ berlaku :
$c_{L2} = a_{L2} + b_{R2}$; $c_{R2} = a_{R2} + b_{L2}$.



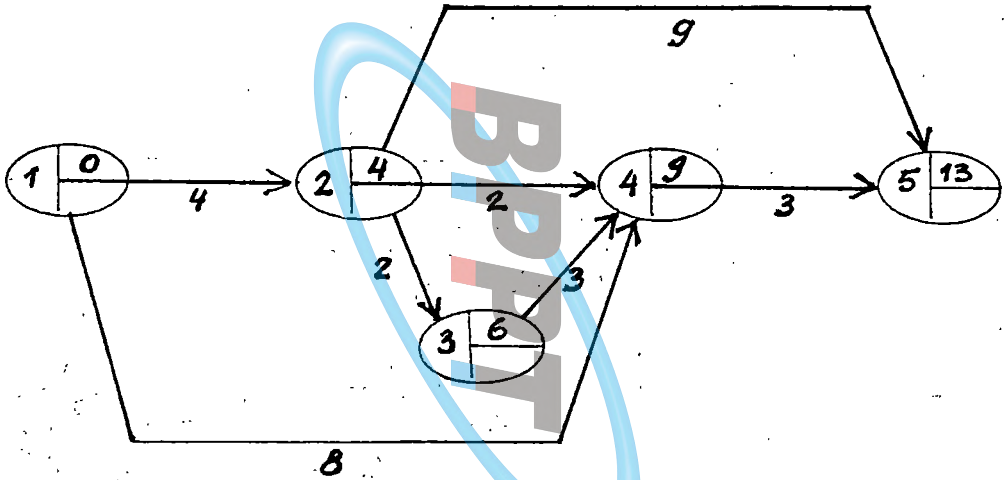
Gambar 7. Konstruksi $\widetilde{max}\,(\tilde{A},\tilde{B})$ *dimana terlihat* $\widetilde{max}\,(\tilde{A},\tilde{B}) \neq \tilde{A}$ *atau* $\widetilde{max}\,(\tilde{A},\tilde{B}) \neq \tilde{B}$.
Perhatikan bahwa untuk A dan B pada gambar 5 berlaku max (A, B) = A.



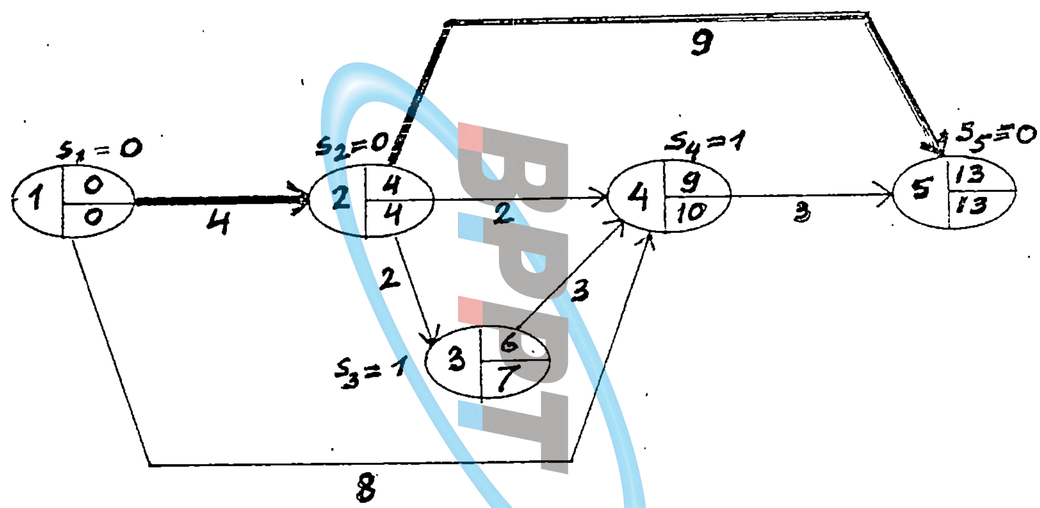
Gambar 8. Konstruksi $\widetilde{min}\ (\tilde{A},\tilde{B})$ *dimana terlihat* $\widetilde{min}\ (\tilde{A},\tilde{B}) \neq \tilde{A}$ *atau* $\widetilde{min}\ (\tilde{A},\tilde{B}) \neq \tilde{B}$. *Perhatikan bahwa untuk* $\tilde{A}$ *dan* $\tilde{B}$ *pada gambar 5 berlaku* $\widetilde{min}\ (\tilde{A},\tilde{B}) = \tilde{B}$.



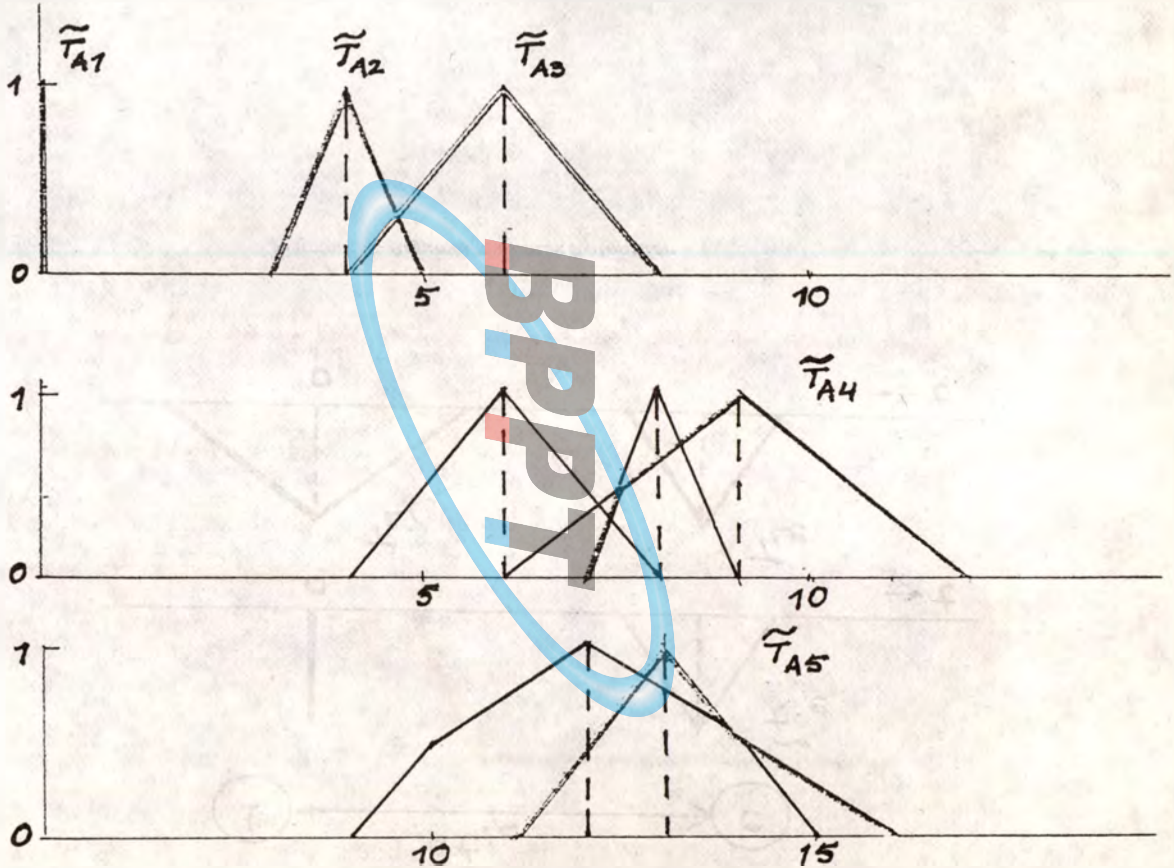
Gambar 9. Network proyek sederhana.



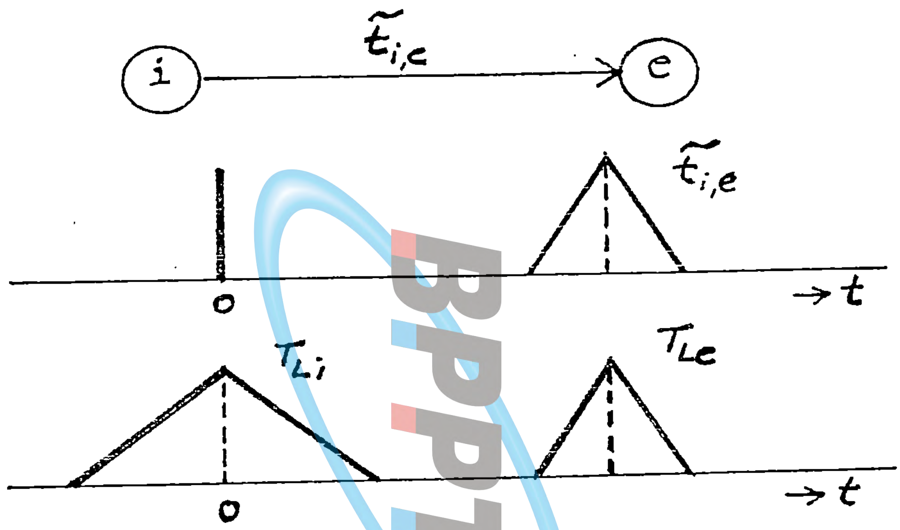
Gambar 10. Perhitungan T_{AJ}



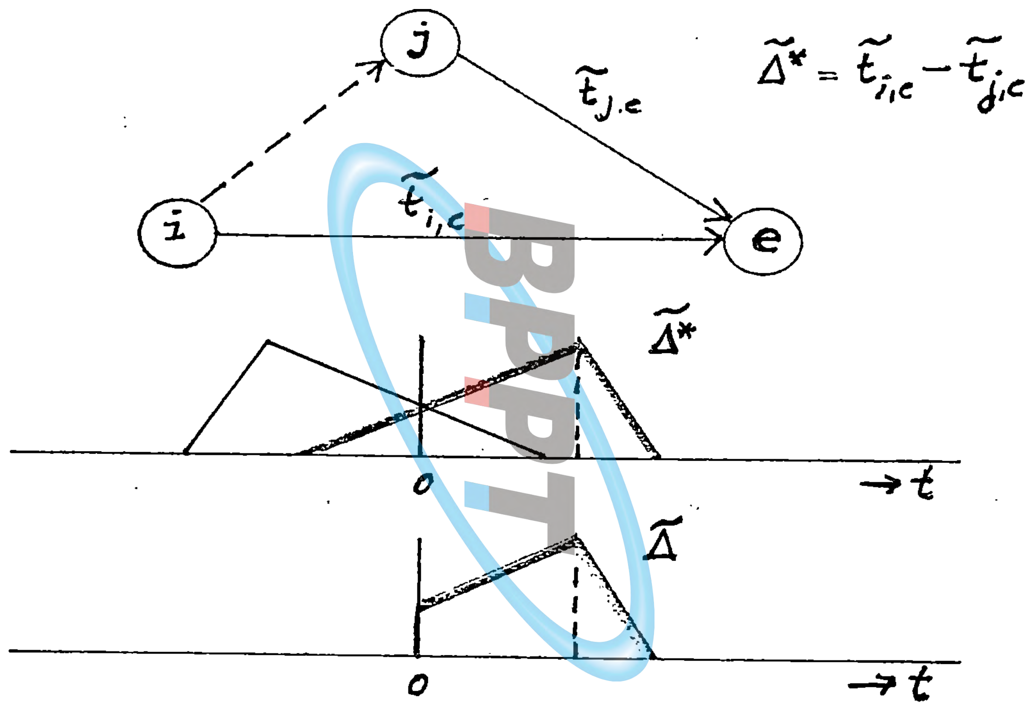
Gambar 11. Perhitungan T_{Lj} dan lintasan kritis.



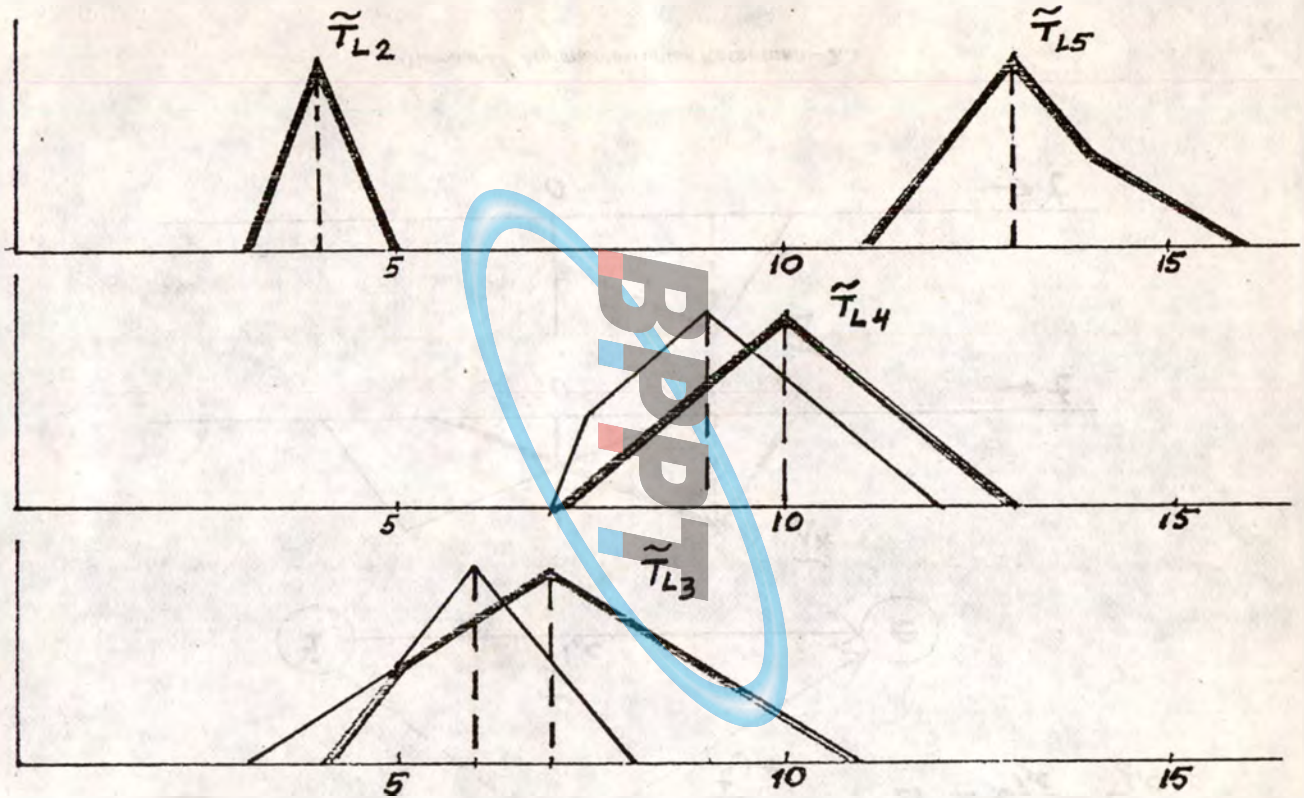
Gambar 12. Konstruksi event time T_{Ai}



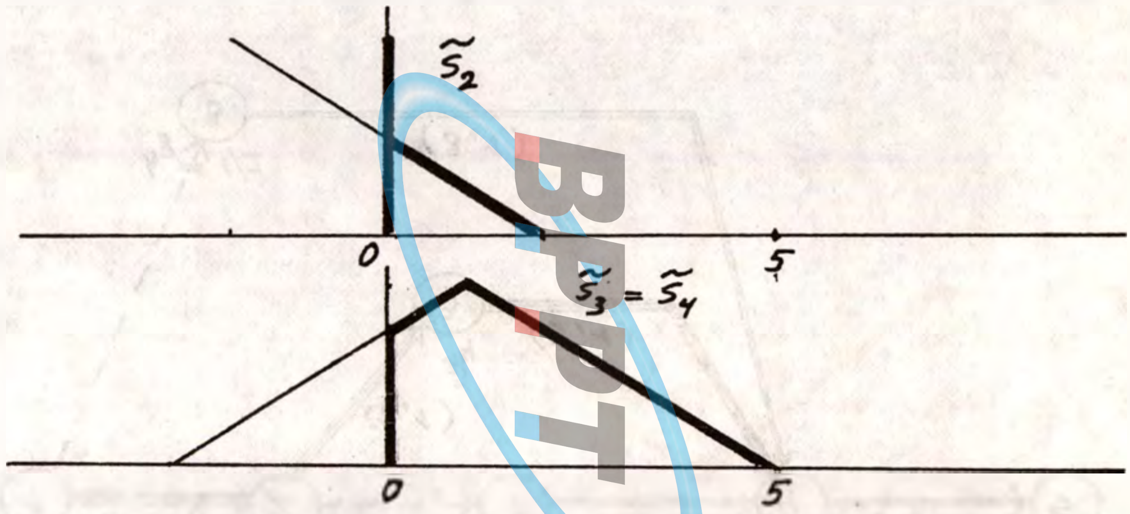
Gambar 13. Argumentasi untuk **Ketentuan — 1.**



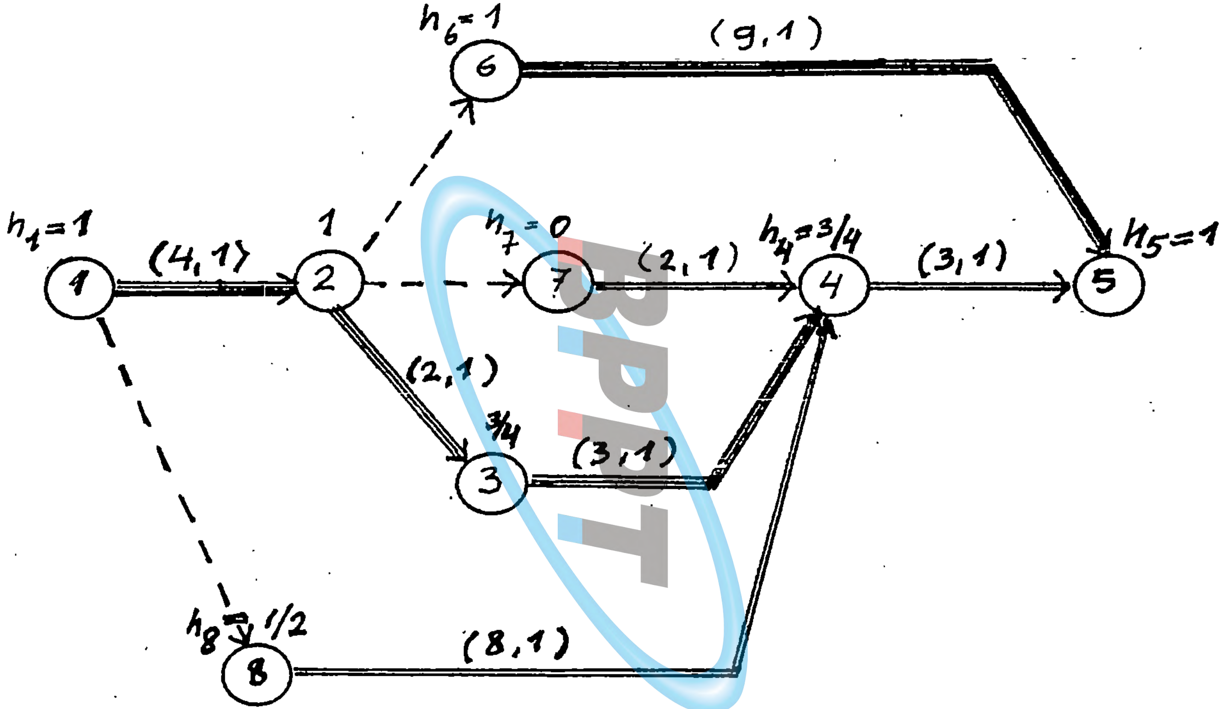
Gambar 14. *Argumentasi untuk* ***Ketentuan—2.***



Gambar 15. Konstruksi $\tilde{T}_{Li}$



Gambar 16. Slack S_i $\quad S_1 = S_5 = 0$



Gambar 17. Network pada gambar 9 digambar kembali untuk kejelasan lintasan. Pada tingkat $\alpha > h_i$ maka event—i tidak terletak pada lintasan kritis.