

METODE ANALITIK BERBASIS *FILTER* KALMAN DENGAN PERSAMAAN *CONSTRAINT LINEAR STATE* *ANALYTICAL METHOD BASED ON KALMAN FILTER WITH LINEAR STATE CONSTRAINT*

Iput Kasiyanto

Pusat Penelitian Sistem Mutu dan Teknologi Pengujian-Lembaga Ilmu Pengetahuan Indonesia

iput006@lipi.go.id

Abstrak

Sejak era teknologi analog hingga teknologi digital, *filtering* merupakan isu penting yang selalu menarik perhatian para pakar elektronika. Teknologi *filtering* yang terus berkembang sejak akhir Perang Dunia ke-2 membuat makin luasnya penggunaan *filter*. Salah satu jenis *filter* yang namanya makin dikenal sejak era 1960an ialah *filter Kalman*. Banyak penelitian yang telah dilakukan dalam mengembangkan *filter Kalman*, baik dalam modifikasi bentuk dasarnya maupun implementasinya di dunia keteknikan. Dalam pemodelan sistem dinamis sering kali terdapat hubungan antar *state* yang sulit dimasukkan ke dalam kerangka kerja *filter Kalman*. Biasanya *constraint* berupa persamaan *state* ini diabaikan begitu saja. Hal ini tentu saja bisa mengurangi akurasi estimasi *state* yang dihasilkan. Oleh karenanya dalam makalah ini dilakukan pendekatan analitik yang berusaha memasukkan *constraint* persamaan *state* ke dalam kerangka kerja *filter Kalman*. *Constraint state* yang digunakan pada makalah ini merupakan *constraint* linear dengan parameter konstan. Dari hasil simulasi diperoleh bahwa kinerja estimasi *filter Kalman* ber-*constraint* selalu lebih efektif daripada *filter Kalman* tanpa *constraint*. Untuk pemberian nilai parameter awal tertentu, ternyata nilai RMS (*root mean square*) eror estimasi *filter Kalman* ber-*constraint* (baik $W=I$ maupun $W = \Sigma^{-1}$) mempunyai nilai akurasi 4 kali lebih baik daripada *filter Kalman* tanpa *constraint*.

Kata kunci: *Filter Kalman, State, Constraint, RMS error.*

Abstract

Since the era of analog technology to digital technology nowadays, *filtering* has been becoming an important issue which always attracts the attention of electronics experts. *Filtering* technology, which keeps evolving since the end of Second World War, has been making filters utilizations more widely. One of filter type whose name has been known since the 1960s is Kalman filter. Many research have been being done in developing Kalman filter, either of its modification from its original structure or its implementation in the engineering world. When one models a dynamic system, it is often there is dependence between its states which is difficult to be incorporated in Kalman filter's framework. Usually, the constraints, presented in state equality, are merely neglected. Of course, it can decrease the accuracy of estimate results. Therefore, this paper developed an analytical approach to incorporate state equality constraints to Kalman filter's framework. State constraints used in this paper were linear constraints with a constant parameter. From simulation results showed that estimation performance of constrained Kalman filter was always more effective than unconstrained one. For a particular initial condition, it was found that RMS (*root mean square*) estimation error of constrained Kalman filter (i.e with $W=I$ or $W = \Sigma^{-1}$) had an accuracy of 4 times better than the unconstrained one.

Keywords: *Filter Kalman, State, Constraint, RMS error.*

1. PENDAHULUAN

Pada awalnya *filter* di bidang elektronika hanya digunakan untuk meredam sinyal yang tidak diinginkan sambil melewatkan sinyal yang diinginkan[1]. Biasanya parameter yang digunakan adalah frekuensi sehingga dikenal istilah *high pass filter*, *low pass filter*, *band pass filter*, *all pass filter*, *butterworth filter*, dan lainnya[2]. Konsep *filter* ini kemudian berkembang menjadi lebih luas. Yang menjadi parameter bukan hanya frekuensi, tapi juga karakteristik statistik dari distribusi probabilitas

spektral daya sinyal. *Filter Kolmogorov* dan *Wiener* merupakan jenis *filter* yang mulanya menggunakan konsep ini[1]. Kedua *filter* tersebut mampu mengestimasi *state* dari sinyal yang penuh *noise*.

Filtering merupakan hal yang sangat dibutuhkan dalam banyak situasi, terutama di bidang teknik dan sistem tertanam[3]. Dalam dunia nyata sering kali informasi yang diinginkan ternyata terkorupsi oleh *noise*[4]. Oleh karenanya, *filtering* yang optimum menjadi kebutuhan yang sangat penting, terlebih lagi pada aplikasi yang membutuhkan ketelitian dan akurasi data yang tinggi, misalnya pada bidang penjelajahan ruang angkasa[5].

Filter Kalman merupakan *filter* optimum yang sangat terkenal dan sudah mengalami banyak sekali pengembangan sejak dikenalkan oleh *Rudolf E. Kalman* pada tahun 1960[6]. *Filter* ini memiliki banyak kelebihan dibandingkan *filter* optimum yang lain[7]. Pada awalnya *filter* ini diaplikasikan pada proyek penjelajahan ruang angkasa, tepatnya pada sistem navigasi pesawat Apollo[8] yang merupakan proyek NASA. Namun seiring dengan makin berkembangnya teknologi digital, *filter Kalman* telah banyak diaplikasikan pada bidang industri maupun bidang lainnya[9].

Filter Kalman merupakan *estimator* yang sangat efektif dalam mengestimasi *state* dinamika sistem yang kompleks[10], khususnya sistem yang melibatkan *noise* proses maupun *noise* pengukuran berupa *white noise*. Contoh kasusnya adalah pada estimasi kesehatan mesin *turbofan* pesawat udara[11]. Dalam melakukan implementasi *filter Kalman* sering kali diketahui ada informasi sinyal atau model yang diabaikan maupun yang dihilangkan. *Constraint* berupa persamaan *state* bukanlah hal yang mudah untuk diakomodasi ke dalam kerangka kerja *filter Kalman* karena harus dipikirkan persoalan penambahan beban komputasi[12]. Sebagai contoh, *constraint* pada nilai *state*, yang bisa saja berupa besaran fisis, sering kali diabaikan karena tidak sesuai dengan struktur *filter Kalman*[13].

Tujuan utama dari makalah ini adalah melakukan pendekatan analitik yang memasukkan *constraint* persamaan *state* ke dalam struktur *filter Kalman* pada studi kasus penelusuran posisi kendaraan darat (*vehicle tracking problem*). Upaya ini dilakukan dengan harapan kinerja *filter* nantinya lebih baik dari pada kinerja *filter* tanpa *constraint*. Makalah ini juga membandingkan kinerja *filter* untuk kasus ber-*constraint* dan tanpa *constraint*. Nilai RMS(*root mean square error*) estimasi *state* digunakan sebagai parameter kualitas kinerja *filter*. Semakin kecil nilai RMS *error* estimasi, semakin baik kualitas kinerja *filter*.

Filter Kalman

1.1. Estimasi State Tak Ber-constraint

State merupakan variabel dari sistem dinamis yang dimodelkan ke dalam bentuk persamaan matematis. Notasi dan penurunan rumus estimasi *state* tanpa *constraint* di bawah ini merujuk pada [14]. Sistem yang ditinjau dianggap merupakan sistem diskret dinamik linear yang terkorupsi oleh *white Gaussian noise*[15]. Jika *filter* Kalman ingin digunakan untuk mengestimasi *state* sebuah sistem, maka sistem tersebut harus dimodelkan sesuai kerangka *filter* Kalman, yang dinyatakan dalam persamaan *state* berikut[14]:

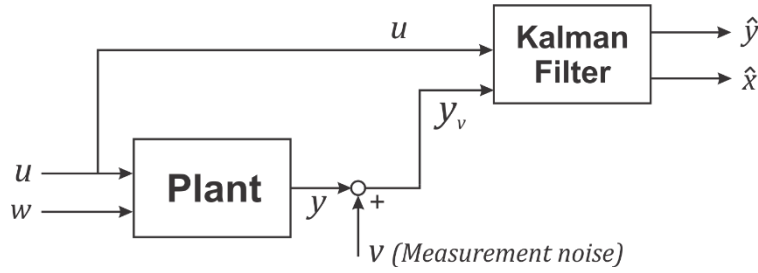
$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k + w_k \quad (1)$$

$$w_k \sim N(0, Q)$$

$$y_k = Hx_k + v_k \quad (2)$$

$$v_k \sim N(0, R)$$

dengan x_k adalah vektor *state*, u_k vektor masukan kontrol; F , G dan H masing – masing ialah matriks transisi dari vektor yang terkait dengannya; w_k dan v_k berturut – turut adalah *noise* proses dan *noise* pengukuran yang diasumsikan *white Gaussian*; Q dan R masing – masing ialah kovarian *noise* proses dan *noise* pengukuran. Sebagai ilustrasi, perhatikan Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Model sistem dinamika diskret yang digunakan untuk filter Kalman [16]

Untuk mencari nilai *estimate* \hat{x}_{k+1} dari hasil pengukuran $\{y_0, y_1, \dots, y_k\}$, maka diasumsikan persyaratan berikut terpenuhi[14]:

$$E[x_0] = \bar{x}_0 \quad (3)$$

$$E[w_k] = 0 \quad (4)$$

$$E[v_k] = 0 \quad (5)$$

$$E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T] = \Sigma_0 \quad (6)$$

$$E[w_k w_k^T] = Q \delta_{km} \quad (7)$$

$$E[v_k v_k^T] = R \delta_{km} \quad (8)$$

$$E[w_k v_k^T] = 0 \quad (9)$$

$$E[x_k v_k^T] = 0 \quad (10)$$

$$E[x_k w_k^T] = 0 \quad (11)$$

$E[.]$ adalah operator nilai harapan, \bar{x} nilai harapan x , dan δ_{km} ialah fungsi delta *Kronecker*. Q dan R merupakan matriks kovarian semi definite positif. Rumus persamaan *Kalman* dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$K_k = F \Sigma_k H^T (H \Sigma_k H^T + R)^{-1} \quad (12)$$

$$\hat{x}_{k+1} = F \hat{x}_k + G u_k + K_k (y_k - H \hat{x}_k) \quad (13)$$

$$\Sigma_{k+1} = (F \Sigma_k - K_k H \Sigma_k) F^T + Q \quad (14)$$

Estimate filter Kalman merupakan *filter* yang meminimumkan *varians error* estimasi. Fungsi densitas peluang bersyarat (*conditional probability density function*) untuk x_{k+1} jika diberikan Y_k adalah sebagai berikut [14]:

$$P(x|y) = \frac{\exp[-(x - \bar{x})^T \Sigma^{-1} (x - \bar{x}) / 2]}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \quad (15)$$

dengan n adalah dimensi dari x dan

$$\Sigma = \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} \Sigma_{yx} \quad (16)$$

Σ_{xx} adalah matriks kovarian x_k . Nilai \bar{x} ialah nilai x yang memaksimalkan fungsi $P(x|y)$, sedangkan Σ adalah nilai kovarian dari \bar{x} .

1.2. Estimasi State Ber-constraint

Jika antar komponen *state* pada (1) terdapat keterkaitan, maka dibutuhkan persamaan *constraint*. Sebagai contoh, persamaan *constraint*-nya bisa dinyatakan sebagai berikut [18]:

$$D x_k = d_k \quad (17)$$

D ialah matriks konstan $s \times n$, d_k adalah vektor $s \times 1$, s jumlah *constraint*-nya, n jumlah *state* dan $s \leq n$. Matriks D mempunyai *rank* penuh, artinya *rank* D ialah s .

2. METODOLOGI

Ada tiga metode yang bisa digunakan untuk mencari solusi nilai *estimate* ber-*constraint* \tilde{x}_k , yaitu metode probabilitas maksimum, metode *mean square* dan metode proyeksi[18]. Mengacu pada [18], pendekatan analitik yang dapat digunakan untuk memecahkan persoalan estimasi *filter Kalman* ber-*constraint* adalah:

Metode Probabilitas Maksimum

Pada metode ini, dicari nilai \tilde{x} yang akan memaksimalkan logaritmik natural dari fungsi densitas bersyarat pada (16). Persoalan yang ingin dipecahkan didefinisikan sebagai berikut:

$$\max \ln P(\tilde{x}|y) \Rightarrow \min(\tilde{x} - \bar{x})^T \Sigma^{-1} (\tilde{x} - \bar{x}) \quad (18)$$

dengan syarat $D\tilde{x} = d$

Solusi yang diperoleh adalah:

$$\tilde{x} = \hat{x} - \Sigma D^T (D \Sigma D^T)^{-1} (D \hat{x} - d) \quad (19)$$

Metode Mean Square

Persoalan yang ingin dipecahkan dirumuskan sebagai berikut:

$$\min_{\tilde{x}} E(\|x - \tilde{x}\|^2 | Y) \Rightarrow \min(\tilde{x} - \bar{x})^T \Sigma^{-1} (\tilde{x} - \bar{x}) \quad (20)$$

dengan syarat $D\tilde{x} = d$

Solusi yang didapatkan adalah:

$$\tilde{x} = \hat{x} - D^T (D D^T)^{-1} (D \hat{x} - d) \quad (21)$$

Metode Proyeksi

Pada metode ini, nilai dari estimasi *state* tanpa *constraint* langsung diproyeksikan ke nilai estimasi *state* ber-*constraint* dengan suatu matriks bobot W . Persoalan yang ingin dipecahkan dirumuskan sebagai berikut:

$$\min_{\tilde{x}} (\tilde{x} - \hat{x})^T W (\tilde{x} - \hat{x}) \quad (22)$$

dengan syarat $D\tilde{x} = d$

Solusi yang diperoleh adalah:

$$\tilde{x} = \hat{x} - W^{-1} D^T (D W^{-1} D^T)^{-1} (D \hat{x} - d) \quad (23)$$

Jika dicermati, sebenarnya (19) dan (21) bisa didapatkan dari (23) dengan cara mengganti $W = \Sigma^{-1}$ untuk (19) dan $W = I$ untuk (21). Matriks W adalah matriks definit positif simetrik. Sifat-sifat statistik dari estimasi *state* ber-*constraint* dibahas secara mendetail di [19].

Solusi *filter Kalman* ber-*constraint* yang diperoleh dengan pendekatan analitik di atas kemudian disimulasikan dengan *Scilab*. Kasus yang diambil adalah kasus penelusuran posisi kendaraan darat. Dinamika sistem dan pengukuran keluarannya didekati dengan persamaan berikut[18]:

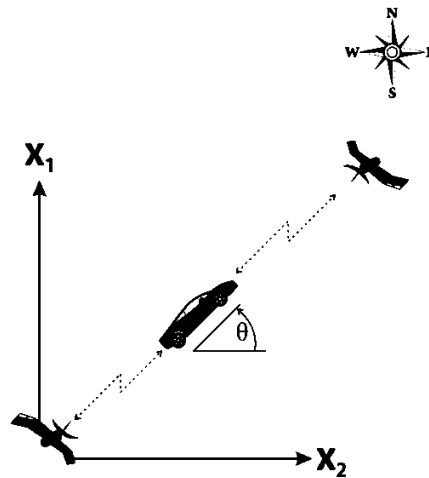
$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau \sin \theta \\ \tau \cos \theta \end{bmatrix} u_k + w_k \quad (24)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} (x_1 - r_{n1})^2 + (x_2 - r_{e1})^2 \\ (x_1 - r_{n2})^2 + (x_2 - r_{e2})^2 \end{bmatrix} + v_k$$

dengan:

x_1	: Posisi kendaraan relatif terhadap arah utara (m)
x_2	: Posisi kendaraan relatif terhadap arah timur (m)
x_3	: Kecepatan kendaraan relatif terhadap arah utara (m/s)
x_4	: Kecepatan kendaraan relatif terhadap arah timur (m/s)
u_k	: Percepatan yang diberikan pada kendaraan (m/s^2)
w_k	: <i>Noise</i> proses, misalnya: jalan yang berlubang
y_k	: Pengukuran kuadrat jarak kendaraan terhadap posisi acuan
w_k	: <i>Noise</i> pengukuran, misalnya: ketidakpastian pengukuran alat
(r_{n1}, r_{e1})	: Posisi acuan pertama (m)
(r_{n2}, r_{e2})	: Posisi acuan kedua (m)
τ	: Waktu <i>sampling</i> (s)
θ	: Sudut arah laju kendaraan ($^\circ$)

Dari (24) dapat dilihat bahwa persamaan *state*-nya merupakan persamaan *linear*, sedangkan pengukurannya berupa persamaan *non-linear*. Sistem di atas diilustrasikan dalam Gambar 2 berikut [18].



Gambar 2. Ilustrasi sistem penelusuran kendaraan darat berbasis *filter Kalman*.

Titik acuan yang dipilih adalah di (0,0) dan (57735,100000) meter. Nilai kovarian untuk *noise* proses dan pengukuran ditetapkan sebagai berikut:

$$Q = \text{diag}(2 \text{ m}, 2 \text{ m}, 1 \text{ m/s}, 1 \text{ m/s}) \quad (25)$$

$$R = \text{diag}(100 \text{ m}, 100 \text{ m})$$

Adapun persamaan *constraint* yang digunakan adalah:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\tan\theta \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$d = [0 \quad 0]^T$$

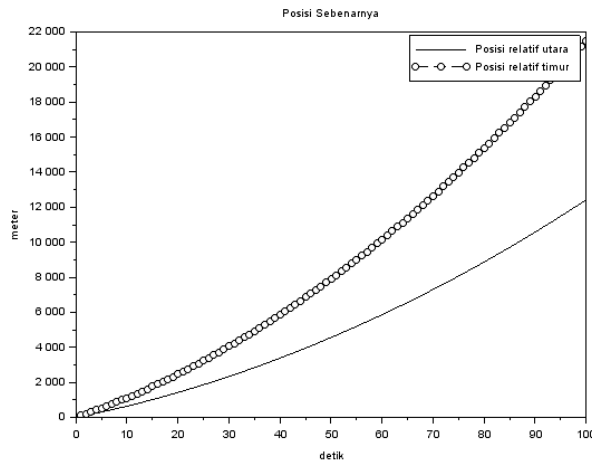
Waktu *sampling* τ ditentukan 1 (satu) detik dan sudut θ ditetapkan sebesar 30° . Percepatan kendaraan diatur sebesar $\pm 2 \text{ m/s}^2$ secara bergantian. Nilai kondisi awal ditentukan sebagai berikut:

$$x = \hat{x}_0 = [0 \quad 0 \quad 58 \quad 100]^T \quad (27)$$

$$\Sigma_0 = \text{diag}[100 \quad 100 \quad 4 \quad 4]^T$$

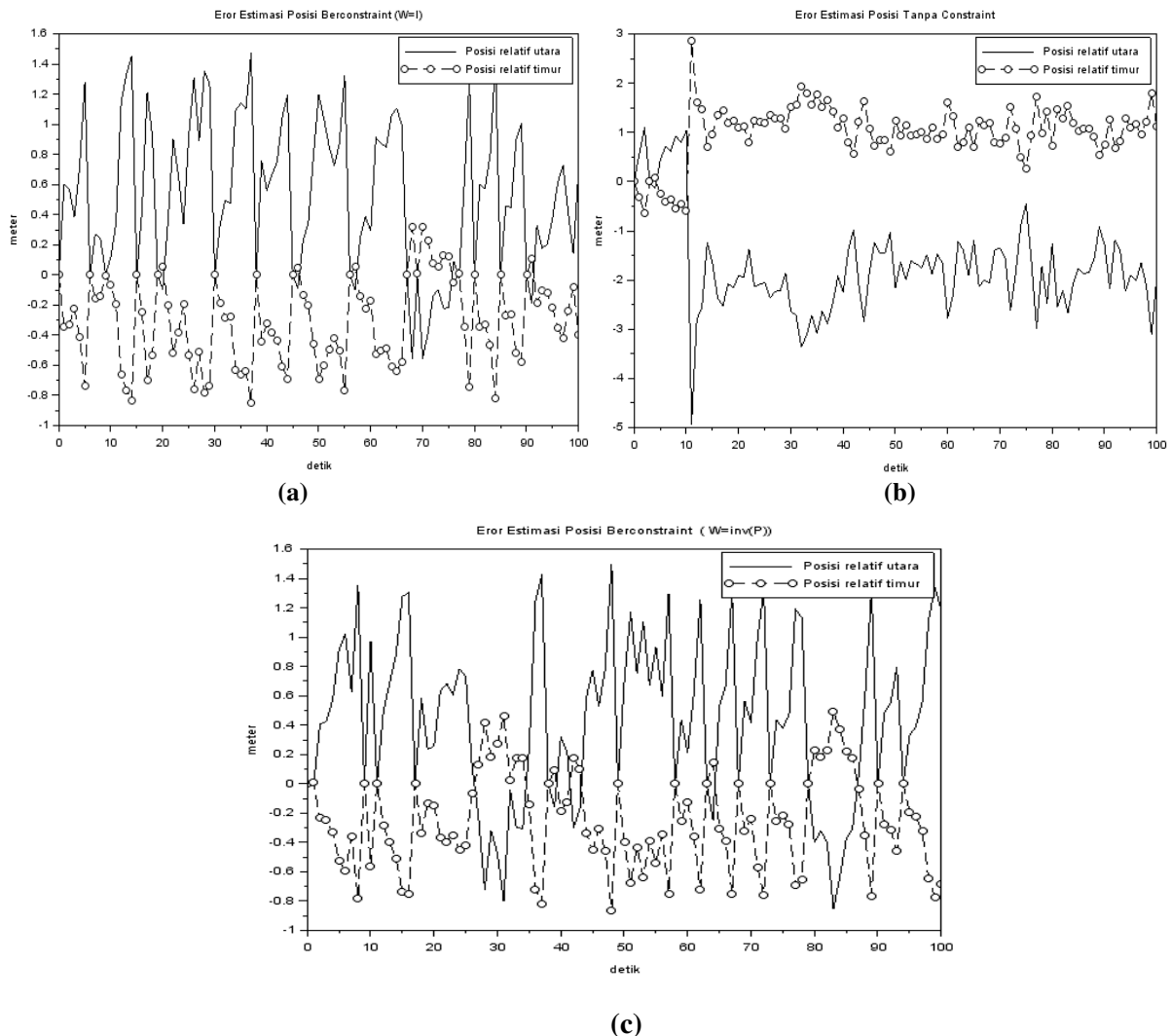
3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Simulasi posisi sebenarnya ditunjukkan pada Gambar 3 berikut. Garis “-” menunjukkan posisi kendaraan terhadap arah utara, sedangkan garis “-o” menunjukkan posisi kendaraan terhadap arah timur. Perhatikan bahwa pada waktu $t = 100$ detik ternyata kendaraan belum mencapai posisi acuan (57735, 100000) m. Ini dikarenakan tujuan simulasi ini bukanlah memenuhi *constraint* waktu minimum, melainkan *error* estimasi minimum.



Gambar 3. Simulasi posisi sebenarnya kendaraan darat dari t=0 detik hingga t=100 detik.

Adapun grafik tipikal *error* estimasi tanpa *constraint*, *error* estimasi ber-*constraint* $W=I$ dan $W = \Sigma^{-1}$ ditunjukkan pada Gambar 4a – 4c berikut.



Gambar 4. Hasil simulasi *filter Kalman* dilihat dari (a) *error* estimasi tanpa *constraint*, (b) *error* estimasi ber-*constraint* $W=I$ dan (c) $W = \Sigma^{-1}$

Dari Gambar 4 bisa dilihat bahwa hasil simulasi estimasi *filter Kalman* ber-*constraint* jauh lebih akurat dibandingkan estimasi *filter Kalman* tanpa *constraint*. Hal tersebut bisa dilihat dari grafik *error* estimasi masing – masing jenis *filter*. Rentang *error* estimasi *filter* tanpa *constraint* bernilai antara 5 dan

3 meter sebagaimana ditunjukkan Gambar 4a, sedangkan untuk *filter* ber-*constraint* bernilai antara -1 dan 1,6 meter sebagaimana terlihat pada Gambar 4b dan 4c. Ini berarti hasil estimasi *filter* ber-*constraint* jauh lebih baik daripada estimasi *filter* tanpa *constraint*. Hal ini disebabkan oleh nilai estimasi *state filter* ber-*constraint* bersifat *unbiased* terhadap nilai *state* sebenarnya. Selain itu nilai kovarian *error state filter* ber-*constraint* selalu lebih kecil dari kovarian *error state filter* tanpa *constraint*. Kedua sifat statistik ini membuat *error* estimasi *state filter* ber-*constraint* selalu lebih baik dibandingkan *error* estimasi *state filter* tanpa *constraint*.

Simulasi juga menampilkan nilai RMS *error* estimasi dalam bentuk numerik untuk masing – masing *filter*. Hasilnya bisa dilihat di Tabel 1. Nilai rata – rata RMS *error* estimasi tanpa *constraint* berkisar antara 1,8 sampai 3,3 meter; sedangkan RMS *error* estimasi ber-*constraint* berkisar antara 0,56 sampai 0,77 meter. Untuk simulasi sebanyak 50 kali diperoleh rata-rata RMS *error* estimasi tanpa *constraint* dan ber-*constraint* masing – masing sebesar 2,6564 m dan 0,6618 m. Artinya, untuk kasus penelusuran kendaraan darat ini estimasi *filter Kalman* ber-*constraint* (baik dengan $W=I$ maupun $W = \Sigma^{-1}$) mempunyai nilai akurasi lebih baik daripada *filter Kalman* tanpa *constraint* yaitu sekitar 4 kalinya. Ini sesuai dengan sifat statistik *filter Kalman* ber-*constraint* yaitu *norm-2 error* estimasi *filter Kalman* ber-*constraint* $W=I$ selalu lebih kecil daripada *norm-2 error* estimasi *filter Kalman* tanpa *constraint*. Selain itu nilai *trace* kovarian *state filter* ber-*constraint* $W=I$ selalu lebih kecil dari *trace* kovarian *state filter* tanpa *constraint*. Kedua sifat statistik tersebut berimplikasi pada nilai *error* estimasi *state filter* ber-*constraint* selalu lebih kecil daripada *error* estimasi *state filter* tanpa *constraint*.

Tabel 1. Hasil simulasi *filter Kalman* pada kasus penelusuran posisi kendaraan darat

No	RMS <i>error</i> estimasi tanpa <i>constraint</i> (m)	RMS <i>error</i> estimasi ber- <i>constraint</i> (m)	No	RMS <i>error</i> estimasi tanpa <i>constraint</i> (m)	RMS <i>error</i> estimasi ber- <i>constraint</i> (m)
1	3,1714	0,6647	26	3,0895	0,6386
2	2,1259	0,6905	27	3,2573	0,6477
3	3,1954	0,6714	28	3,1714	0,6487
4	3,0646	0,6680	29	3,0107	0,6091
5	2,1433	0,7683	30	2,0257	0,5892
6	3,2042	0,7039	31	1,9508	0,7553
7	3,2896	0,7453	32	2,1948	0,5878
8	3,0389	0,6276	33	2,0134	0,7373
9	3,3160	0,6616	34	2,1859	0,7346
10	1,8831	0,7088	35	2,0473	0,5968
11	3,0802	0,5592	36	2,0481	0,7330
12	3,2333	0,7023	37	3,2586	0,7473
13	2,1482	0,7247	38	2,9171	0,6246
14	3,1466	0,5930	39	3,0648	0,5946
15	2,0899	0,6016	40	2,2060	0,6177
16	2,0702	0,6130	41	3,0008	0,6160
17	2,0764	0,6520	42	2,1278	0,6739
18	2,2430	0,6659	43	3,2691	0,6790
19	2,0641	0,7483	44	3,2067	0,6426
20	2,9995	0,6500	45	3,2076	0,6965
21	3,3048	0,7536	46	2,0635	0,6224
22	1,8614	0,7739	47	2,8784	0,6233
23	2,1423	0,6103	48	3,0928	0,6479
24	2,2859	0,5570	49	2,9267	0,5750
25	3,3841	0,6833	50	2,0447	0,6530

4. KESIMPULAN

Metode analitik untuk memasukkan *constraint* persamaan *state* ke dalam kerangka kerja *filter Kalman* telah berhasil dilakukan. Hasil simulasi memperlihatkan keefektifan estimasi *filter Kalman* ber-*constraint* terhadap estimasi *filter Kalman* tanpa *constraint*. Hal ini bisa dilihat dari nilai RMS *error* estimasi *filter Kalman* ber-*constraint* (baik $W=I$ maupun $W = \Sigma^{-1}$) mempunyai nilai $1/4$ kali lebih kecil dibandingkan estimasi *filter Kalman* tanpa *constraint*.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Kepala Puslit Sistem Mutu dan Teknologi Pengujian-Lembaga Ilmu Pengetahuan Indonesia atas fasilitas dan dukungan dalam melakukan kegiatan penelitian penulis sehingga makalah ini dapat terselesaikan dengan baik.

PERNYATAAN PENULIS

Penulis dengan ini menyatakan bahwa seluruh isi makalah ini merupakan tanggung jawab penulis.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] M. S. Grewal and A. P. Andrews, *Kalman filtering: theory and practice using MATLAB*, vol. 5. 2011.
- [2] K. Lacanette, "A Basic Introduction to *Filters* - Active, Passive, and Switched-Capacitor," *Appl. Note*, pp. 1–22, 2010.
- [3] D. Simon, "Kalman *Filtering*," *Embedded Systems Programming*, pp. 72–79, 2001.
- [4] S. Pongpon Sri and X.-H. Yu, "An adaptive *filtering* approach for electrocardiogram (ECG) signal noise reduction using neural networks," *Neurocomputing*, vol. 117, pp. 206–213, 2013.
- [5] E. Lefferts, F. Markley, and M. Shuster, "Kalman *filtering* for spacecraft attitude estimation," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 5, no. 5. pp. 417–429, 1982.
- [6] R. E. Kalman and others, "A new approach to linear *filtering* and prediction problems," *J. basic Eng.*, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, 1960.
- [7] S. Y. Chen, "Kalman *filter* for robot vision: A survey," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 59, no. 11, pp. 4409–4420, 2012.
- [8] M. S. Grewal and A. P. Andrews, "Applications of Kalman *filtering* in aerospace 1960 to the present," *IEEE Control Syst. Mag.*, vol. 30, no. 3, pp. 69–78, 2010.
- [9] F. Auger, M. Hilairet, J. M. Guerrero, E. Monmasson, T. Orłowska-Kowalska, and S. Katsura, "Industrial applications of the kalman *filter*: A review," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 60, no. 12, pp. 5458–5471, 2013.
- [10] B. J. T. Morgan, *A Kalman filter primer*, vol. 102, no. 477. 2010.
- [11] D. Simon and D. L. Simon, "Kalman *filter constraint* switching for turbofan engine health estimation," *Eur. J. Control*, vol. 12, no. 3, pp. 331–343, 2006.
- [12] P. S. Maybeck, *Stochastic models, estimation, and control - Volume 2*, vol. 141–2. 1982.

- [13] D. Simon and D. L. Simon, "Kalman *filtering* with inequality *constraints* for turbofan engine health estimation," *Control Theory and Applications, IEE Proceedings*, vol. 153, no. 3. pp. 371–378, 2006.
- [14] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, "Optimal *Filtering*," *Network Bristol England*, vol. 16, no. 1. pp. 85–113, 1979.
- [15] S. Reece and S. Roberts, "An introduction to Gaussian processes for the Kalman *filter* expert," *2010 13th Int. Conf. Inf. Fusion*, pp. 1–9, 2010.
- [16] "Block Diagram of Kalman *Filter*.jpg." [Online]. Available: [https://sites.google.com/site/leongedmond/_/rsrc/1244133989272/my-projects/math750project/Block Diagram of Kalman *Filter*.jpg?height=200&width=600](https://sites.google.com/site/leongedmond/_/rsrc/1244133989272/my-projects/math750project/Block%20Diagram%20of%20Kalman%20Filter.jpg?height=200&width=600). [Accessed: 06-Mar-2016].
- [17] D. Simon, "Kalman *filtering* with *state constraints*: a survey of linear and nonlinear algorithms," *IET Control Theory Appl.*, vol. 4, no. 8, p. 1303, 2010.
- [18] D. Simon and T. L. I. Chia, "Kalman *filtering* with *state equality constraints*," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 38, no. 1, pp. 128–136, 2002.
- [19] Chia, T. (1985). Parameter identification and *state* estimation of constrained systems. Ph.D. dissertation, Case Western Reserve University, Cleveland, OH, 1985.