p-ISSN: 2503-4723 e-ISSN: 2541-2612

MODEL MATEMATIKA KOMPETISI DUA POPULASI

Nurul Imamah Ah[1], Christine Wulandari Suryaningrum[2], Abdul jalil[3], Ajeng Dwi Ana Putri[3]

[1]Universitas Muhammadiyah Jember
nurulimamah@unmuhjember.ac.id

[2] Universitas Muhammadiyah Jember
Christine.wulandari@unmuhjember.ac.id

[3] Universitas Muhammadiyah Jember
Abduljalil.matematika@gmail.com

[3] Universitas Muhammadiyah Jember
ajengdwianaputri@gmail.com

Abstrak

Matematika terapan yang bermakna penggunaan matematika dalam menyelesaikan fenomena alam, baik fenomena fisik maupun fenomena non fisik. Salah satu penggunaan matematika terapan dalam ilmu ekologi adalah model matematika. Model matematika yang dapat mewakili suatu populasi makhluk hidup adalah Model Matematika kompetisi dua populasi, model matematika kompetisi dua populasi yaitu Interaksi yang terjadi antara individu dalam satu spesies atau interaksi antara individu dengan spesies yang berbeda dan memiliki dampak negatif bagi keduanya disebut persaingan atau kompetisi. berdasarkan hasil analisis diperoleh 4 titik kesetimbangan, sedangkan kestabilan dari titik kesetimbangan sistem juga memenuhi 4 kondisi
Kata Kunci: matematika terapan, model kompetisi dua populasi, titik kesetimbangan, kestabilan dari titik kesetimbangan

Abstract

Applied mathematics which means the use of mathematics in solving natural phenomena, both physical phenomena and non-physical phenomena. Applied mathematics in ecology is mathematical models. Mathematical models can represent a population of living things are the Mathematical Model of two-population competition, the mathematical model of two-population competition is Interactions that occur between individuals in one species or interactions between individuals with different species and have a negative impact on both are called competition. based on the results of the analysis obtained 4 equilibrium points, while the stability of the equilibrium point of the system also fulfills 4 conditions.
Keywords: applied mathematics, model of the two-population competition, equilibrium, stability of the equilibrium.

PENDAHULUAN

Matematika terapan dapat digunakan dalam berbagai bidang, misalnya dalam bidang kedokteran, ekologi, biologi, ekonomi dan bidang-bidang lainnya [1]. Pemodelan matematika sebagai suatu pendekatan dalam merumuskan fenomena digunakan untuk meramalkan perilaku sistem. Perilaku sistem ini kemudian diasumsikan sehingga kita dapat mengetahui perilaku situasi yang sebenarnya. Salah satu fenomena yang dapat diformulasikan dalam bentuk pemodelan Matematika adalah fenomena perilaku makhluk hidup [2].

Setiap makhluk hidup dituntut untuk senantiasa berinteraksi dengan makhluk hidup lainnya. Interaksi yang terjadi antara individu dalam satu spesies atau interaksi antara individu dengan spesies yang berbeda dapat berdampak positif bagi keduanya, berdampak negatif bagi keduanya maupun berdampak negatif bagi salah satu spesies dan positif bagi spesies yang lain. Jika berdampak positif bagi keduanya, interaksi keduanya disebut simbiosis mutualisme. Jika berdampak negatif bagi keduanya disebut persaingan atau kompetisi, sedangkan jika berdampak positif bagi spesies yang satu sedangkan bagi spesies yang lainnya negatif maka interaksi tersebut disebut dengan *prey-predator*. [3]

Ekologi merupakan salah satu cabang ilmu biologi yang mempelajari makhluk hidup seperti manusia, hewan dan tumbuhan yang hidup bersama dan saling mempengaruhi di dalam lingkungannya. Kompetisi dalam suatu ekosistem merupakan salah satu bentuk interaksi antar individu yang bersaing memperebutkan kebutuhan hidup yang sama. Pada individu hewan, kebutuhan hidup yang sering diperebutkan antara lain adalah makanan, sumber air, tempat berlindung atau bersarang dan pasangan untuk kawin. Contoh kompetisi antar populasi hewan yaitu kambing dan sapi yang memakan rumput di wilayah yang sama atau harimau dan singa dalam berburu mangsa yang sama[4]. Contoh lain kompetisi suatu populasi adalah kompetisi antara mahasiswa dengan mahasiswa yang lain untuk memperoleh beasiswa, contoh tersebut adalah salah satu model matematika yang menggambarkan persaingan antar individu [1]

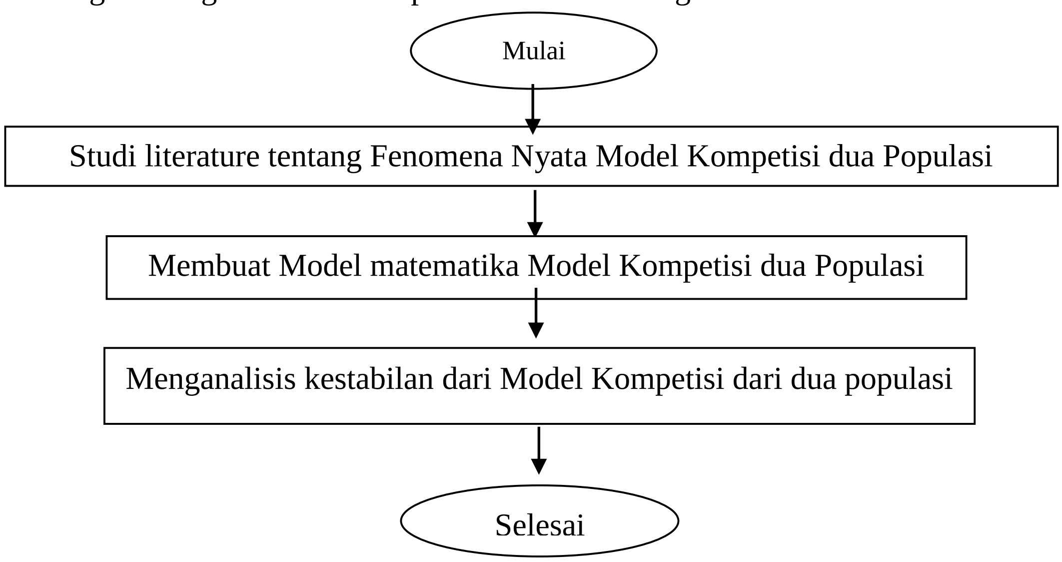
Berdasarkan pentingnya kajian model matematika dalam kajian ekologi, maka topik penelitian ini tentang Analisis Dinamik Model Kompetisi Dua Populasi. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui kestabilan dari titik kesetimbangan dari model kompetisi dua populasi, dengan melakukan simulasi dapat menggunakan Runge Kutta Fhelberg [5].

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian kepustakaan dengan melakukan Analisis sumber pustaka yang menjadi bahan kajian dengan melakukan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Mengkaji literatur tentang model matematika
2. Membangun Model kompetisi dua Populasi dengan membuat asumsi-asumsi
3. Menganalisis titik kesetimbangan model kompetisi dari dua populasi
4. Analisis Kestabilan dari titik kesetimbangan model kompetisi dua populasi

Langkah-langkah tersebut dapat dirinci dalam diagram alir berikut.



Gambar 1 Diagram alir analisis model kompetisi dua populasi

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model kompetisi dua populasi merupakan suatu model matematika yang menggambarkan persaingan antar individu dalam satu populasi atau persaingan antara dua populasi untuk mendapatkan kebutuhan hidupnya, dengan mengasumsikan bahwa setiap populasi tumbuh secara logistic, maka model kompetisi dua populasi Lotka Volterra direpresentasikan dengan sistem persamaan diferensial biasa nonlinear autonomus berikut.

$$\frac{dM}{dt} = r_1 M \left(1 - \frac{M}{K_1} - \alpha \frac{N}{K_1}\right)$$

$$\frac{dN}{dt} = r_2 N \left(1 - \frac{N}{K_2} - \beta \frac{M}{K_2}\right) \qquad (1)$$

Berikut keterangan variabel dan parameter pada model matematika:

Variabel dan parameter	Keterangan
r_1	Laju pertumbuhan Intrinsik
$r_1 M$	Laju Kelahiran Populasi I
$\frac{r_1 M}{k_1}$	Laju kematian populasi I dipengaruhi k_1 karena adanya kompetisi dengan spesies yang sama
$\frac{\alpha r_1 MN}{k_1}$	Laju kematian populasi I karena adanya kompetisi dengan spesies II
$r_2 N$	Laju Kelahiran Populasi II
$\frac{r_2 N}{k_2}$	Laju kematian populasi II karena adanya kompetisi dengan spesies yang sama
$\frac{\beta r_2 MN}{k_2}$	Laju kematian populasi II karena adanya kompetisi dengan spesies Berbeda

Titik kesetimbangan pada persamaan (1) merupakan kondisi tidak terjadi perubahan atau populasi tidak terpengaruh oleh waktu, yakni $\frac{dM}{dt} = 0$ dan $\frac{dN}{dt} = 0$

$$r_1 M \left(1 - \frac{M}{K_1} - \alpha \frac{N}{K_1}\right) = 0 \qquad (2)$$

diperoleh $M = 0$ atau $1 - \frac{M}{K_1} - \alpha \frac{N}{K_1} = 0$

$$r_2 N \left(1 - \frac{N}{K_2} - \beta \frac{M}{K_2}\right) = 0 \qquad (3)$$

Maka $N = 0$ atau $\left(1 - \frac{N}{K_2} - \beta \frac{M}{K_2}\right) = 0$

Berdasarkan persamaan (2) dan (3) maka diperoleh 4 kasus:

1. Titik kesetimbangan E_1= (0,0) yakni Ketika kedua populasi punah
2. Titik kesetimbangan E_2= (0, k_2), populasi pertama punah
3. Titik kesetimbangan E_3= (k_1, 0), populasi kedua punah

4. Titik kesetimbangan E_3= ($\frac{\alpha k_2 - k_1}{\alpha\beta - 1}$,$\frac{\beta k_1 - k_2}{\alpha\beta - 1}$), populasi kedua ada dengan syarat eksistensi $\frac{\alpha k_2 - k_1}{\alpha\beta - 1} \geq 0$ dan $\frac{\beta k_1 - k_2}{\alpha\beta - 1} \geq 0$

   Syarat Eksistensi $\frac{\propto K_2 - K_1}{\alpha\beta - 1} \geq 0$, jika $\alpha\beta > 1$, maka $\propto K_2 > K_1$

   jika $\alpha\beta < 1$, maka $K_1 > \propto K_2$

Kestabilan sistem tersebut dapat dicari dengan menggunakan matriks Jacobi berikut.

$$J = \begin{bmatrix} r_1 - 2\frac{r_1}{K_1}M - \frac{r_1 \propto N}{K_1} & \frac{-r_1 M\alpha}{K_2} \\ \frac{-r_2\beta N}{K_2} & r_2 - 2\frac{r_2}{K_2}N - \frac{r_2 \propto N}{K_2} \end{bmatrix}$$

a. Untuk titik $E_1 = (0,0)$

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$
$\lambda_1 = r_1 > 0$
$\lambda_2 = r_2 > 0$
E_1 Tak stabil

b. $E_2 = (K_1, 0)$

$$J(K_1, 0) = \begin{bmatrix} -r_1 & -r_1 \propto \\ 0 & r_2\left(1 - \frac{\beta K_1}{K_2}\right) \end{bmatrix}$$
$\lambda_1 = -r_1 > 0$
$\lambda_2 = r_2\left(1 - \frac{\beta K_1}{K_2}\right)$
Jika $K_2 < \beta K_1$, maka E_3 Stabil Asimtotik

$K_2 > \beta K_1$, maka E_3 Tak stabil Pelana

c. $E_2 = (0, K_2)$

$$J(0, K_2) = \begin{bmatrix} r_1 - \frac{r_1 \propto K_2}{K_1} & 0 \\ \frac{-r_2\beta K_2}{K_2} & r_2 - 2\frac{r_2}{K_2} \cdot K_2 \frac{r_2}{K_2} \cdot 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} r_1\left(1 - \frac{\propto K_2}{K_1}\right) & 0 \\ -r_2\beta & r_2 - 2r_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} r_1\left(1 - \frac{\propto K_2}{K_1}\right) & 0 \\ -r_2\beta & -r_2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = r_1\left(1 - \frac{\propto K_2}{K_1}\right)$

Jika $K_1 < \propto K_2$, $\lambda_1 < 0$

$K_1 > \propto K_2$, $\lambda_1 < 0$

$\lambda_2 = -r_2 < 0$, E_2 Stabil Asimtotik

E_2 Tak Stabil Pelana

d. $E_4 = \left(\frac{\propto K_2 - K_1}{\alpha\beta - 1} \text{ , } \frac{\beta K_1 - K_2}{\alpha\beta - 1}\right)$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{-r_1 M}{K_1} & \frac{-r_1 2M}{K_2} \\ \frac{-r_2}{K_2}\beta N & \frac{r_2}{K_2} N \end{bmatrix}$$

E_4 memenuhi persamaan $r_1 - \frac{r_1 M}{K_1} - \propto r_1 \frac{MN}{K_1} = 0$ dan $r_2 - \frac{r_2 N}{K_2} - \beta r_2 \frac{MN}{K_2} = 0$

$$|J - \lambda I| = \left|\begin{bmatrix} -\frac{r_1}{k_1}M - \lambda & -\frac{r_1}{k_1}\alpha M \\ -\frac{r_2}{k_2}\beta N & -\frac{r_2}{k_2}N - \lambda \end{bmatrix}\right|$$

$= \left(-\frac{r_1}{k_1}M - \lambda\right)\left(-\frac{r_2}{k_2}N - \lambda\right) - \left(\frac{r_1}{k_1}\alpha M - \frac{r_2}{k_2}\beta N\right)$

$= \frac{r_1 r_2}{k_1 k_2}MN + \frac{r_1 M}{k_1}\lambda - \frac{r_2 N}{k_2}\lambda + \lambda^2 + \frac{r_1 r_2}{k_1 k_2}\alpha\beta MN$

$= \lambda^2 + \left(\frac{r_1 M}{k_1} + \frac{r_2 N}{k_2}\right)\lambda + \frac{r_1 r_2}{k_1 k_2}MN + \frac{r_1 r_2}{k_1 k_2}\alpha\beta MN$

$= \lambda^2 + \left(\frac{r_1}{k_1}M + \frac{r_2}{k_2}N\right)\lambda + \frac{r_1 r_2}{k_1 k_2}MN(1 + \alpha\beta)$

Jika $D > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in R$

$\lambda_1 + \lambda_2 = -\left(\frac{r_1}{k_1}M + \frac{r_2}{k_2}N\right) < 0$

$\lambda_1 . \lambda_2 = \frac{r_1 r_2}{k_1 k_2}MN(1 + \alpha\beta) > 0$

$\lambda_1 . \lambda_2 < 0$ E_4 stabil asimtotik

Jika $D = 0$

$\lambda_{1.2} = -\left(\frac{r_1}{k_1}M + \frac{r_2}{k_2}N\right) < 0$ E_4 stabil asimtotik

Jika $D < 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in R$

$\lambda_{1.2} = -b \pm \sqrt{D}$

$= -\left(\frac{r_1}{k_1}M + \frac{r_2}{k_2}N\right) \pm \sqrt{D}\ \ i$

$\alpha = -\left(\frac{r_1}{k_1}M + \frac{r_2}{k_2}N\right) < 0$ E_4 stabil asimtotik

Simulasi model kompetisi dua populasi dilakukan dengan mencoba beberapa kasus, yaitu:

1. Kasus 1
   Jika $k_2 < \beta k_1$

No	U_0	V_0	r_1	k_1	r_2	k_2	*alpha*	*betta*	E_4	Titik stabil
1	8	4	0.4	50	0.4	60	1	2	Eksis	E2,E3,E4
2	4	8	0.4	50	0.4	60	1	2	Eksis	E2,E3,E4
3	12	4	0.4	50	0.4	60	1	2	Eksis	E2,E3,E4
4	4	12	0.4	50	0.4	60	1	2	Eksis	E2,E3,E4

2. Kasus 2
   Jika $k_1 < \alpha k_2$

No	U_0	V_0	r_1	k_1	r_2	k_2	*Alpha*	*Betta*	E_4	Titik stabil
1	4	12	0.4	50	0.5	60	1	2	Eksis	E2
2	4	12	0.5	60	0.4	50	1	2	Tidak eksis	E2
3	12	4	0.5	50	0.4	60	1	2	Tidak eksis	E2
4	12	4	0.4	60	0.5	50	1	2	Tidak eksis	E2

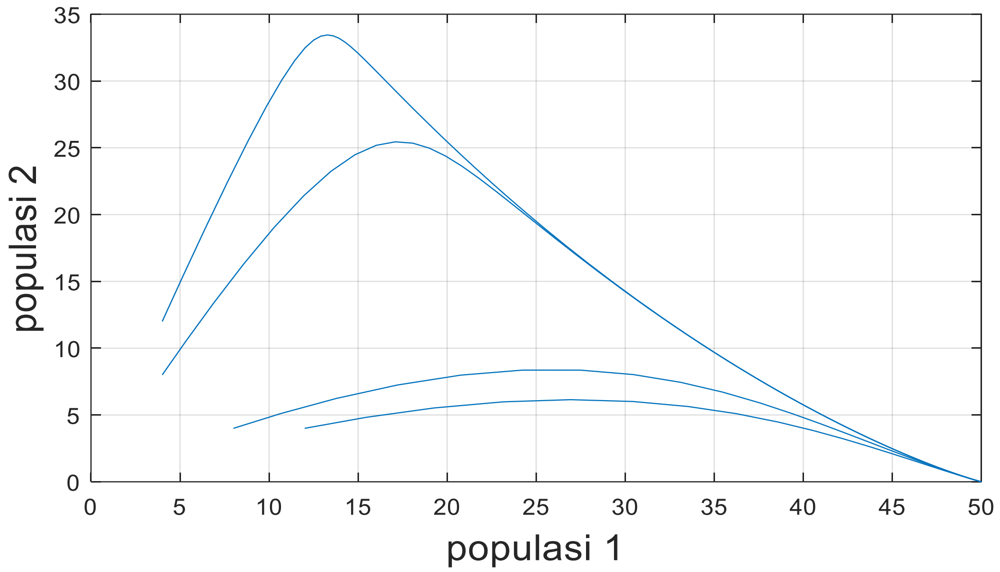
3. Kasus 3
   Jika $k_1 > \alpha k_2$ dan $k_2 > \beta k_1$

No	U_0	V_0	r_1	k_1	r_2	k_2	*alpha*	*betta*	E_4	Titik stabil
1	8	4	0.4	50	0.4	60	2	1	Eksis	E2,E3,E4
2	4	8	0.4	60	0.4	50	2	1	Eksis	E2,E3,E4
3	12	4	0.4	50	0.4	60	2	1	Eksis	E2,E3,E4
4	4	12	0.4	60	0.4	50	2	1	Eksis	E2,E3,E4

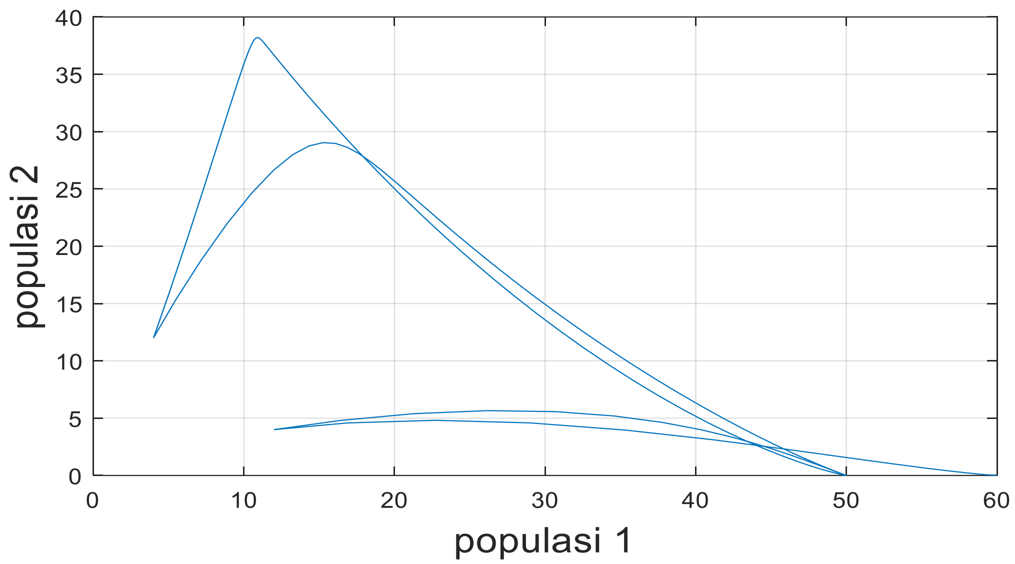
4. Kasus 4
   Jika $k_1 < \alpha k_2$ dan $k_2 < \beta k_1$

No	$\boldsymbol{U_0}$	$\boldsymbol{V_0}$	$\boldsymbol{r_1}$	$\boldsymbol{k_1}$	$\boldsymbol{r_2}$	$\boldsymbol{k_2}$	***alpha***	***betta***	$\boldsymbol{E_4}$	**Titik stabil**
1	8	4	0.4	50	0.4	60	2	1	Eksis	E2,E3,E4
2	4	8	0.4	60	0.4	50	2	1	Eksis	E2,E3,E4
3	12	4	0.4	50	0.4	60	2	1	Eksis	E2,E3,E4
4	4	12	0.4	60	0.4	50	2	1	Eksis	E2,E3,E4

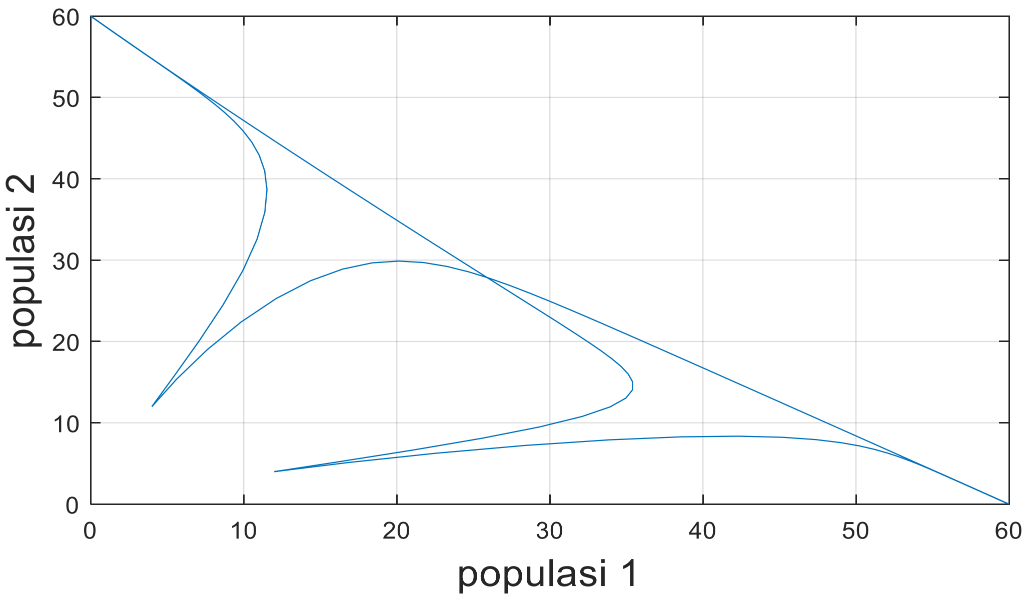
Hasil simulasi numerik model matematika kompetisi dua populasi berdasarkan keempat kasus disajikan pada gambar berikut.



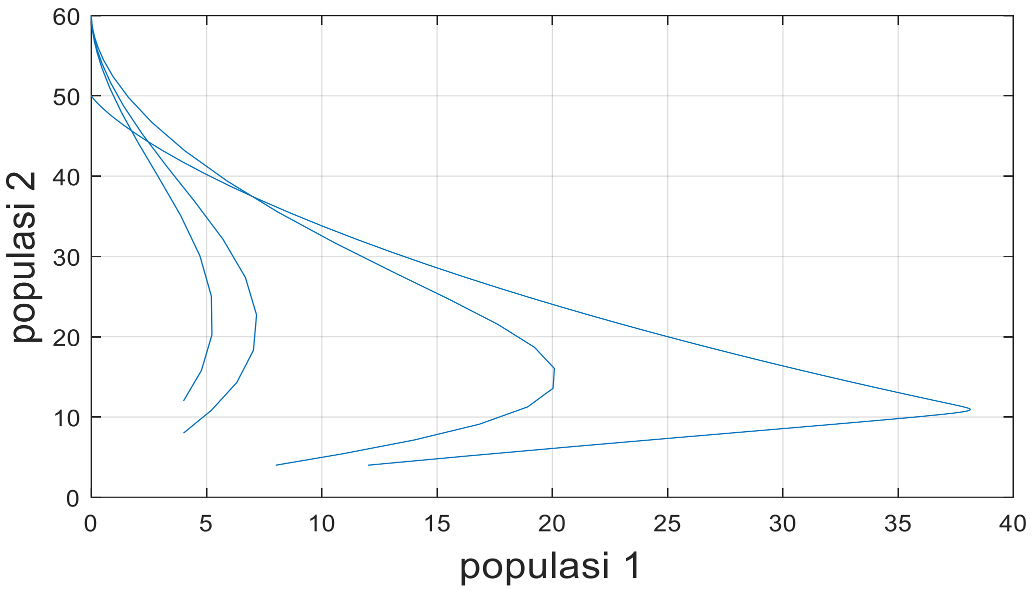
Gambar 1. Simulasi dari table 1



Gambar 2. Simulasi dari table 2



Gambar 3. Simulasi dari table 3



Gambar 4. Simulasi dari table 4

Berdasarkan hasil simulasi dengan menggunakan metode (RKF) pada program matlab tersebut, maka diperoleh kestabilan pada table berikut.

Tabel 1. Kestabilan dari titik kesetimbangan

No	Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi	Kestabilan	Syarat Kestabilan
1	$E_1 = (0,0)$	-	Tak stabil	-
2	$E_2 = (k_1, 0)$	-	Stabil asimtotik	$k_2 < \beta k_1$
			Tak stabil pelana	$k_2 > \beta k_1$
3	$E_3 = (0, k_2)$	-	Stabil asimtotik	$k_1 < \alpha k_2$
			Tak stabil pelana	$k_1 > \alpha k_2$
4	$E_4 = \left(\frac{\alpha k_2 - k_1}{\alpha\beta - 1}, \frac{\beta k_1 - k_2}{\alpha\beta - 1}\right)$	$\frac{-k_1 + \alpha k_2}{\alpha\beta - 1} \geq 0, \frac{k_2 - \beta k_1}{\alpha\beta - 1} > 0$	Stabil asimtotik	$k_1 > \alpha k_2$ dan $k_2 > \beta k_1$
			Stabil asimtotik	$k_1 < \alpha k_2$ dan $k_2 < \beta k_1$

KESIMPULAN

Model matematika kompetisi dua populasi memiliki 4 titik kesetimbangan, dengan 4 tipe kestabilan, yaitu:

1. Jika E_2 Stabil asimtotik, maka E_4 tidak eksis jadi hanya ada 2 titik kesetimbangan yaitu E_1 dan E_2
2. Jika E_3 Stabil asimtotik, maka E_4 tidak eksis jadi hanya ada 2 titik kesetimbangan yaitu E_1 dan E_3
3. Jika E_2 tak stabil pelana, maka E_4 eksis dan S.A dan E_3 tak stabil pelana maka E_4 eksis dan stabil asimtotik
4. Jika E_2 Stabil asimtotik dan E_3 Stabil asimtotik, maka E_4 juga Stabil asimtotik

Beberapa hal yang dapat dilakukan untuk pengembangan model matematika kompetisi dua populasi ini adalah dengan mengkaitkan dengan realita kehidupan atau pada kajian ekologi yang lebih spesifik.

DAFTAR RUJUKAN

[1] Toha, Syamsuddin. *Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Model Perilaku Jumlah Pelaku Narkoba dengan Faktor Rehabilitasi*. Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi: Makassar

[2] Warsiki. Endang. *pengantar uji stabilitas untuk model kompetisi antara dua populasi.* Universitas Kristen Satya Wacana: Salatiga

[3] Kartono, (2012). *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Graha Ilmu:Yogyakarta

[4] Kuznetsov, Y.A. (1998). *Element of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag: New York.

[5] Borreli & Coleman.(1996). *Differential Equation Modelling Approach*