



## **PDP PARABOLIK DENGAN METODE ADI DAN STUDI KASUS PADA BATANG BERPENAMPANG BUJUR SANGKAR**

Oleh Drs. B. Gultom  
Staf Kelompok Penelitian Matematika

### *RINGKASAN*

*Model matematika suatu peristiwa tendensi adalah persamaan diferensial parsial parabolik. Perilaku peristiwa tersebut dapat diketahui dengan mencari solusi PDP tersebut. Salah satu metode untuk solusi adalah metode ADI (Implisit Alternating Direction Method). Penerapan metode ini akan dibahas pada batang berpenampang bujur sangkar.*

#### 1. PENDAHULUAN

Dua jenis metode yang digunakan dalam memecahkan persamaan diferensial parsial secara numerik ialah metode eksplisit dan metode implisit. Suatu kelemahan pada metode eksplisit adalah mengenai konvergensi dan konsistensi, sedang pada metode implisit hal ini tidak ditemukan. Salah satu metode implisit adalah yang dikembangkan oleh Peaceman, Rachford<sup>41</sup>, adalah yang disebut metode ADI (The implisit Alternating-Direction Method).

Pada makalah ini, akan dibahas metode ADI pada dimensi dua berbentuk persamaan diferensial parabolik. Bentuk persamaan ini sering ditemui pada persamaan tendensi di atmosfer, atau pada konduksi panas pada kondisi tidak mantap (unsteady-state). Suatu aplikasi (studi kasus) akan diperlihatkan konduksi panas pada batang di mana permukaan berbentuk persegi panjang.

## 2. METODE ADI

Prinsip metode ADI adalah melakukan dua persamaan diferensi yang digunakan secara berturut-turut dengan langkah waktu  $\Delta t/2$ . Persamaan pertama berbentuk implisit dalam arah sumbu-x dan persamaan kedua berbentuk implisit dalam arah sumbu-y.

Pandang persamaan parabolik berbentuk

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2-1)$$

Misalkan  $u = u(x, y, t)$  dan  $v = v(i, j, n)$

di mana  $x = i \Delta x$ , dan  $y = j \Delta y$ ,  
 $i$  dan  $j$  bilangan bulat positif

Sebut  $v_{i,j}^*$  adalah harga antara pada akhir langkah-waktu yang pertama, maka (2-1) dapat ditulis menjadi

$$\frac{v_{i,j}^* - v_{i,j,n}}{\Delta t/2} = \delta_x^2 v_{i,j}^* + \delta_y^2 v_{i,j,n} \quad (2-2)$$

diikuti oleh

$$\frac{v_{i,j,n+1} - v_{i,j}^*}{\Delta t/2} = \delta_x^2 v_{i,j}^* + \delta_y^2 v_{i,j,n+1} \quad (2-3)$$

Di sini

$$\delta_x^2 v_{i,j} = \frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\delta_y^2 v_{i,j} = \frac{v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}$$

Untuk menyederhanakan permasalahan, kita ambil  $\Delta x = \Delta y$ , sehingga persamaan (2-2) dan (2-3), masing-masing menjadi

$$\begin{aligned} -v_{i-1,j}^* + 2(1/\lambda + 1)v_{i,j}^* - v_{i+1,j}^* \\ = v_{i,j-1,n} + 2(1/\lambda - 1)v_{i,j,n} + v_{i,j+1,n} \end{aligned} \quad (2-4)$$

$$\begin{aligned} -v_{i,j-1,n+1} + 2(1/\lambda + 1)v_{i,j,n+1} - v_{i,j+1,n+1} \\ = v_{i-1,j}^* + 2(1/\lambda - 1)v_{i,j}^* + v_{i+1,j}^* \end{aligned} \quad (2-5)$$

Mula-mula persamaan (2-4) diselesaikan untuk  $v^*$ , kemudian harga  $v^*$  ini disubsitusi pada persamaan (2-5) dan diperoleh harga  $v_{i,j,n+1}$  yaitu pada akhir selang waktu  $\Delta t$ . Karena (2-4) dan (2-5) adalah sistem persamaan linier dengan matriks koefisien berbentuk tridiagonal, maka berikut ini kita analisis solusi sistem persamaan bentuk tridiagonal. Nanti solusi ini menjadi subrutin dalam penyelesaian persamaan (2-4) dan (2-5).

### 3. SUBRUTIN TRIDAG.

Pandang bentuk umum sistem persamaan dengan matriks koefisien berbentuk matriks tridiagonal.

$$\begin{array}{rcl}
 b_1 v_1 + c_1 v_2 & = & d_1 \\
 a_2 v_1 + b_2 v_2 + c_2 v_3 & = & d_2 \\
 a_3 v_2 + b_3 v_3 + c_3 v_4 & = & d_3 \\
 \text{-----} & & \text{-----} \\
 a_i v_{i-1} + b_i v_i + c_i v_{i+1} & = & d_i \\
 \text{-----} & & \text{-----} \\
 a_{N-1} v_{N-2} + b_{N-1} v_{N-1} + c_{N-1} v_N & = & d_{N-1} \\
 a_N v_{N-1} + b_N v_N & = & d_N
 \end{array} \quad (3-1)$$

Persamaan (3-1) diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss. Di sini paling banyak ada 3 variabel untuk setiap persamaan. Mula-mula diperlihatkan solusi rekursi berbentuk

$$v_i = \gamma_i - \frac{c_i}{\beta_i} v_{i+1} \quad (3-2)$$

di mana  $\beta_i$  dan  $\gamma_i$  akan ditentukan harganya.

Substitusi (3-2) ke (3-1), maka akan kita peroleh

$$a_i \left( \gamma_{j-1} - \frac{c_{i-1}}{\beta_{i-1}} v_i \right) + b_i v_i + c_i v_{i+1} = d_i$$

Jadi

$$v_i = \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{\beta_{i-1}}} - \frac{c_i v_{i+1}}{b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{\beta_{i-1}}} \quad (3-3)$$

Bentuk (3-3) memenuhi bentuk (3-2), asal hubungan rekursi berikut dipenuhi

$$\beta_i = b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{\beta_{i-1}}, \quad \gamma_i = \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{\beta_i}$$

Dari baris pertama persamaan (3-1), didapat

$$v_1 = \frac{d_1}{b_1} - \frac{c_1}{b_1} v_2,$$

memberikan harga  $\beta_1 = b_1$  dan  $\gamma_1 = d_1/\beta_1$ .

Dengan mensubsitusikan (3-2) pada baris terakhir persamaan (3-1) menghasilkan

$$v_N = \frac{d_N - a_N v_{N-1}}{b_N} = \frac{d_N - a_N (\gamma_{N-1} - \frac{c_{N-1}}{\beta_{N-1}} v_N)}{b_N} \quad (3-4)$$

Dari (3-4) dihasilkan

$$v_N = \frac{d_N - a_N \gamma_{N-1}}{b_N - \frac{a_N c_{N-1}}{\beta_{N-1}}} = v_N \quad (3-5)$$

Dari (3-1) sampai (3-5) disimpulkan algoritma yang lengkap bagi sistem tridiagonal sebagai berikut

$$\begin{aligned} v_N &= \gamma_N \\ v_i &= \gamma_i - \frac{c_i v_{i+1}}{\beta_i}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 1 \end{aligned} \quad (3-6)$$

di mana  $\beta_i$  dan  $\gamma_i$  ditetapkan dari hubungan rekursi

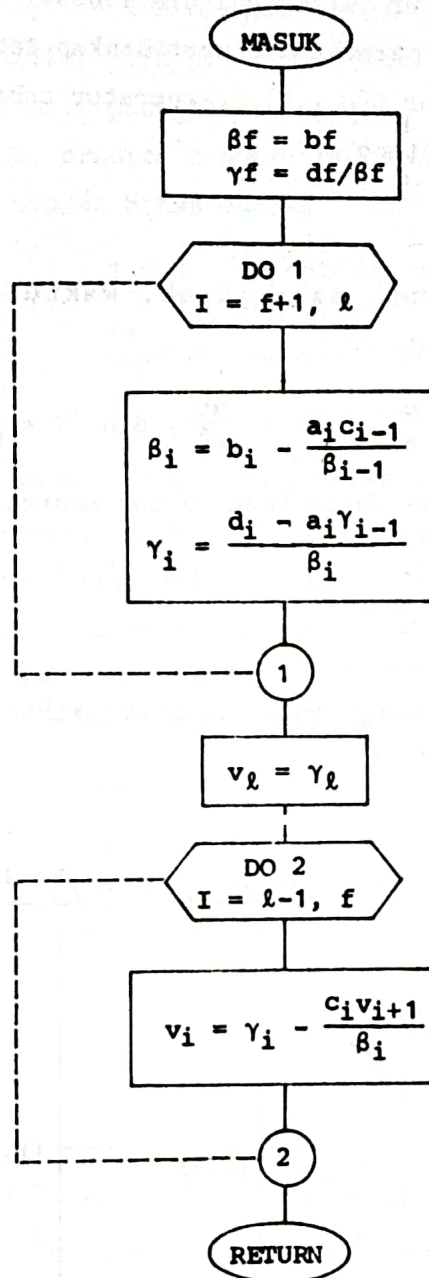
$$\begin{aligned} \beta_1 &= b_1, \quad \gamma_1 = d_1/\beta_1 \\ \beta_i &= b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{\beta_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, N \\ \gamma_i &= \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{\beta_i}, \quad i = 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (3-7)$$

Subroutine TRIDAG

Argumen boneka : f, l, a, b, c, d, v

Bagan Alir .....

## BAGAN ALIR



### 4. STUDI KASUS

#### 4.1 Permasalahan

Sebagai studi kasus, dilakukan penelitian teoritis terhadap sebuah batang yang panjangnya tak berhingga dengan penampang berbentuk bujur sangkar dengan

sisi 2a. Mula-mula temperatur batang uniform sebesar  $\theta_0$  dan kemudian secara tiba-tiba temperatur permukaan dipertahankan tetap sebesar  $\theta_1$ . Yang akan dicari adalah temperatur  $\theta(x,y,t)$  (temperatur sebagai fungsi dari ruang dan waktu) di dalam batang.

#### 4.2 Metode

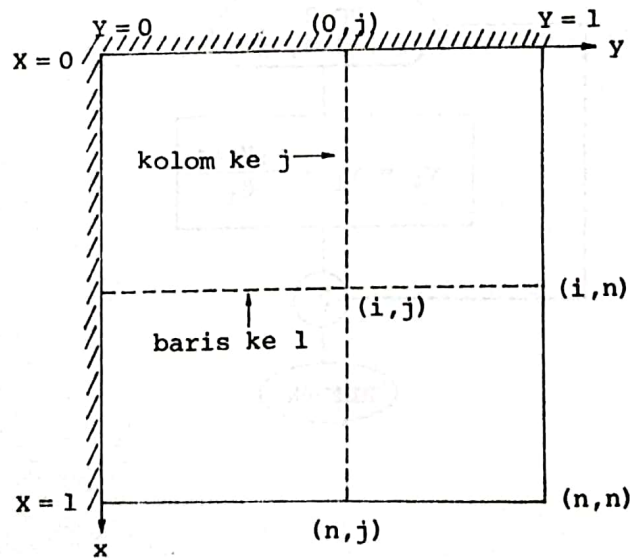
Pada besaran tanpa dimensi maka jarak, waktu dan temperatur didefinisikan sebagai berikut

$$x = \frac{x}{a}, \quad y = \frac{y}{a}, \quad \tau = \frac{\alpha t}{a^2}, \quad \text{dan} \quad T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \quad (4-1)$$

Pada batang terdapat konduksi dalam keadaan tak mantap, dan dihubungkan oleh persamaan diferensial.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (4.2)$$

Karena sifat simetri dari batang, maka cukup melakukan perhitungan pada satu kuadran (lihat gambar 1.1)



Gambar 1.1

Satu kuadran dari penampang batang

Pusat batang ( $X = 0, Y = 0$ ) dianggap sebagai titik grid  $(0,0)$ , sedang titik sudut  $X = 1, Y = 1$  dianggap sebagai titik grid  $(n,n)$ . Karena sifat simetri yang dimiliki oleh permukaan, maka tidak ada panas melalui sumbu  $X$  dan  $Y$ , yang berarti pada batas ini terjadi isolasi, yang berarti terhadap permukaan  $X$  dan  $Y$ , gradien temperatur normal adalah nol. Ini berarti syarat awal dan syarat batas adalah

$$\begin{aligned} \tau = 0 & ; T = 0 & \text{di seluruh daerah} \\ \tau > 0 & ; T = 1 & \text{pada sisi } X = 1 \text{ dan } Y = 1 \\ & \frac{\partial T}{\partial X} = 0 & \text{sepanjang sisi } X = 0 \\ & \frac{\partial T}{\partial Y} = 0 & \text{sepanjang sisi } Y = 0 \end{aligned}$$

Metode ADI yang sudah ditulis pada persamaan (2-2) dan (2-3) dilakukan pada persamaan (4-2), dengan setengah langkah waktu pertama dalam arah sumbu  $X$ . Misalkan  $T$  temperatur pada permulaan setengah langkah waktu  $\Delta\tau/2$ , dan  $T^*$  temperatur pada akhir langkah waktu tersebut. Kalau persamaan (2-2) dilakukan pada (4-1) dan dengan melakukan metode diferensi hingga pada syarat batas di titik grid  $(0,j)$ , didapat sistem tridiagonal untuk setiap kolom  $j$  ;

$$\begin{aligned} b T_{0,j}^* - 2 T_{1,j}^* & = d_0 \\ - T_{0,j}^* + b T_{1,j}^* - T_{2,j}^* & = d_1 \\ \dots & \dots \\ - T_{i-1,j}^* + b T_{i,j}^* - T_{i+1,j}^* & = d_i \quad (4-3) \\ \dots & \dots \\ - T_{n-3,j}^* + b T_{n-2,j}^* - T_{n-1,j}^* & = d_{n-2} \\ - T_{n-2,j}^* + b T_{n-1,j}^* & = d_{n-1} \end{aligned}$$

di mana

$$\left. \begin{aligned} d_i & = T_{i,j-1} + f T_{i,j} + T_{i,j} & \text{untuk } i = 0, 1, \dots, n-2 \\ d_{n-1} & = T_{n-1,j-1} + f T_{n-1,j} + T_{n-1,j+1} + T_{n,j} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{untuk} \\ j \neq 0 \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} d_i & = 2 T_{i,1} + f T_{i,0} & \text{untuk } i = 0, 1, \dots, n-2 \\ d_{n-1} & = 2 T_{n-1,1} + f T_{n-1,0} + T_{n,0} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{untuk} \\ j = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{dan } b & = 2 (1/\lambda + 1) \\ f & = 2 (1/\lambda - 1) \\ \lambda & = \Delta\lambda / (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Bentuk (4-3) sama dengan bentuk (3-1), dan dapat diselesaikan dengan algoritma (3-6) dan (3-7). Dengan CALL Subroutine TRIDAG seperti pada

butir 3, maka persamaan (4-3) dapat diselesaikan untuk  $T_{ij}^*$  ( $i=0,1,\dots,n-1$ ). Prosedur yang sama dilakukan lagi bagi kolom berurutan  $j = 0,1,2,\dots,n-1$  sampai semua harga  $T_{ij}^*$  didapat pada akhir setengah langkah waktu pertama ( $\Delta\tau/2$ ). Temperatur pada akhir langkah waktu yang kedua digunakan dengan jalan yang sama pada persamaan (2-3) di setiap titik pada suatu baris  $j = 0,1,\dots,n-1$  kemudian dilanjutkan pada setengah langkah waktu kedua pada baris berurutan  $i = 0,1,2,\dots,n-1$ .

#### 4.3 Hasil Komputasi

Hasil komputasi berikut, diperoleh dengan data input sebagai berikut.

$\Delta T$  = langkah waktu (time-step) = 0.50  
 $\Delta X = \Delta Y$  = panjang grid = 0.1  
 $T_{MAKS}$  = temperatur maksimum = 0.95  
 $N$  = banyak titik grid = 10  
 Komputer = IBM-3090  
 CPU-time = 0.31 menit

Hasil sebagai berikut

Pada waktu  $T = 0.05000$ , temperatur dalam kuadran adalah

0.01579	0.01737	0.02272	0.03398	0.05566	0.09644	0.17262	0.31467	0.57943	1.07278	1.00000
0.01737	0.01894	0.02428	0.03552	0.05717	0.09788	0.17394	0.31577	0.58010	1.07266	1.00000
0.02272	0.02428	0.02959	0.04077	0.06230	0.10279	0.17844	0.31949	0.58238	1.07227	1.00000
0.03398	0.03552	0.04077	0.05183	0.07311	0.11313	0.18790	0.32734	0.58720	1.07143	1.00000
0.05566	0.05717	0.06230	0.07311	0.09391	0.13304	0.20613	0.34243	0.59646	1.06983	1.00000
0.09644	0.09788	0.10279	0.11313	0.13304	0.17047	0.24041	0.37083	0.61389	1.06681	1.00000
0.17262	0.17394	0.17844	0.18790	0.20613	0.24041	0.30445	0.42387	0.64644	1.06118	1.00000
0.31467	0.31577	0.31949	0.32734	0.34243	0.37083	0.42387	0.52279	0.70714	1.05068	1.00000
0.57943	0.58010	0.58238	0.58720	0.59646	0.61389	0.64644	0.70714	0.82028	1.03110	1.00000
1.07278	1.07266	1.07227	1.07143	1.06983	1.06682	1.06118	1.05068	1.03110	0.99462	1.00000
1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

Pada waktu  $T = 0.10000$ , temperatur dalam kuadran adalah

0.09333	0.09942	0.11890	0.15546	0.21508	0.30496	0.42973	0.58082	0.70958	0.66423	1.00000
0.09942	0.10546	0.12481	0.16113	0.22035	0.30962	0.43356	0.58363	0.71153	0.66648	1.00000
0.11890	0.12481	0.14374	0.17927	0.23721	0.32455	0.44581	0.59264	0.71777	0.67370	1.00000
0.15546	0.16113	0.17927	0.21333	0.26886	0.35258	0.46881	0.60954	0.72948	0.68724	1.00000
0.21508	0.22035	0.23721	0.26886	0.32048	0.39829	0.50631	0.63711	0.74858	0.70932	1.00000
0.30496	0.30962	0.32455	0.35258	0.39829	0.46719	0.56284	0.67866	0.77737	0.74260	1.00000
0.42973	0.43356	0.44581	0.46881	0.50631	0.56284	0.64132	0.73635	0.81733	0.78881	1.00000
0.58082	0.58363	0.59264	0.60954	0.63711	0.67866	0.73635	0.80620	0.86573	0.84476	1.00000
0.70958	0.71153	0.71777	0.72948	0.74858	0.77737	0.81733	0.86573	0.90697	0.89245	1.00000
0.66423	0.66648	0.67370	0.68724	0.70932	0.74260	0.78881	0.84476	0.89245	0.87565	1.00000
1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000



Pada waktu  $T = 0.20000$  ; Temperatur dalam kuadran adalah

0.40354	0.41077	0.43205	0.46633	0.51243	0.57037	0.64334	0.73701	0.84127	0.84398	1.00000
0.41077	0.41790	0.43893	0.47279	0.51834	0.57558	0.64766	0.74020	0.84319	0.84587	1.00000
0.43205	0.43893	0.45919	0.49183	0.53574	0.59091	0.66039	0.74958	0.84885	0.85144	1.00000
0.46633	0.47279	0.49184	0.52251	0.56376	0.61560	0.68089	0.76470	0.85798	0.86041	1.00000
0.51243	0.51834	0.53574	0.56376	0.60145	0.64881	0.70846	0.78503	0.87025	0.87247	1.00000
0.57037	0.57558	0.59091	0.61560	0.64881	0.69054	0.74310	0.81057	0.88566	0.88762	1.00000
0.64334	0.64766	0.66039	0.68089	0.70846	0.74310	0.78673	0.84275	0.90508	0.90671	1.00000
0.73701	0.74020	0.74958	0.76470	0.78503	0.81057	0.84275	0.88405	0.93001	0.93121	1.00000
0.84127	0.84319	0.84885	0.85798	0.87025	0.88567	0.90508	0.93001	0.95776	0.95848	1.00000
0.84398	0.84587	0.85144	0.86041	0.87247	0.88762	0.90671	0.93121	0.95848	0.95919	1.00000
1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

Pada waktu  $T = 0.40000$  ; Temperatur dalam kuadran adalah

0.77532	0.77809	0.78636	0.79998	0.81851	0.84105	0.86674	0.89726	0.93831	0.95512	1.00000
0.77809	0.78082	0.78899	0.80244	0.82074	0.84301	0.86838	0.89853	0.93907	0.95567	1.00000
0.78636	0.78899	0.79685	0.80980	0.82742	0.84886	0.87328	0.90231	0.94134	0.95732	1.00000
0.79997	0.80244	0.80980	0.82192	0.83842	0.85849	0.88136	0.90854	0.94508	0.96004	1.00000
0.81851	0.82074	0.82742	0.83842	0.85339	0.87160	0.89235	0.91701	0.95017	0.96374	1.00000
0.84105	0.84301	0.84886	0.85849	0.87160	0.88755	0.90572	0.92732	0.95636	0.96825	1.00000
0.86674	0.86838	0.87328	0.88136	0.89235	0.90572	0.92096	0.93906	0.96341	0.97338	1.00000
0.89726	0.89853	0.90231	0.90853	0.91701	0.92732	0.93906	0.95302	0.97179	0.97948	1.00000
0.93831	0.93907	0.94134	0.94508	0.95017	0.95636	0.96341	0.97179	0.98306	0.98768	1.00000
0.95512	0.95567	0.95732	0.96004	0.96375	0.96825	0.97338	0.97948	0.98768	0.99103	1.00000
1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

Pada waktu  $T = 0.75000$  ; Temperatur dalam kuadran adalah

0.96003	0.96052	0.96199	0.96439	0.96767	0.97170	0.97650	0.98213	0.98705	0.99430	1.00000
0.96052	0.96101	0.96246	0.96483	0.96806	0.97205	0.97679	0.98235	0.98720	0.99437	1.00000
0.96199	0.96246	0.96385	0.96614	0.96925	0.97309	0.97765	0.98301	0.98768	0.99458	1.00000
0.96439	0.96483	0.96614	0.96828	0.97120	0.97479	0.97907	0.98408	0.98846	0.99492	1.00000
0.96766	0.96806	0.96925	0.97120	0.97384	0.97711	0.98099	0.98555	0.98952	0.99539	1.00000
0.97170	0.97205	0.97309	0.97479	0.97711	0.97997	0.98336	0.98735	0.99083	0.99596	1.00000
0.97650	0.97679	0.97765	0.97907	0.98099	0.98336	0.98618	0.98950	0.99238	0.99665	1.00000
0.98213	0.98235	0.98301	0.98408	0.98555	0.98735	0.98950	0.99201	0.99421	0.99745	1.00000
0.98704	0.98720	0.98768	0.98846	0.98952	0.99083	0.99238	0.99421	0.99580	0.99815	1.00000
0.99430	0.99437	0.99458	0.99492	0.99539	0.99597	0.99665	0.99745	0.99815	0.99919	1.00000
1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

#### 4.4 Diskusi atas hasil

Hasil komputasi yang diperoleh di atas adalah harga-harga temperatur  $T_{ij}$  yang tak berdimensi di setiap titik  $i, j$  ( $i = 0, 1, \dots, 10$  ;  $j = 0, 1, \dots, 10$ ) dalam kuadran dari permukaan batang. Demikian juga besaran waktu  $T$ , pada komputasi tidak berdimensi. Jika diinginkan hasil yang berdimensi, maka harus digunakan rumus transformasi (4-1), tetapi hal ini tidak dilakukan, mengingat tujuan makalah ini adalah memperlihatkan metode komputasi ADI

dalam membuat simulasi konduksi panas. Bagaimana keampuhan metode ini belum dapat dibanding dengan hasil riil, berhubung belum dilakukan eksperimen/pengukuran, mengenai konduksi panas pada batang baja.

## 5. KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diperoleh adalah bahwa metode ADI adalah cara implisit dalam memecahkan persamaan diferensial parsial. Terlihat dalam komputasi, dilakukan dua kali penggunaan metode eliminasi Gauss pada matriks berbentuk tridiagonal, salah satu adalah dalam arah sumbu x, dan yang lain dalam arah sumbu y. Hasil komputasi memperlihatkan bahwa dibagian dalam permukaan, temperatur naik setiap waktu, sedang dibatas selalu tetap sesuai dengan syarat batas yang diberikan.

## DAFTAR PUSTAKA

1. ALAN ADAMS : "Computer Aided Heat Transfer Analysis", International Student Edition, 1973.
2. LINDON C THOMAS : "Fundamentals of Heat Transfer", Prentice-Hull, inc, 1980.
3. CURTIS F. GERALD : "Applied Numerical Analysis", Addison Wesley Publihing Coy, 1977.
4. JAIN M.K. : "Numerical Solution of Differential Equations", John Wiley & Sons, 1979.

- - - oo0oo - - -

## DISKUSI

### 1. RUSTAM EFFENDI

Tanya :  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  kelihatannya antara kiri dan kanan tidak match. Apakah bukan  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$ ,  $c$  = kecepatan  
Mohon penjelasan !

Jawab : Bentuk pertama disebut parabolis, adalah persamaan tendensi. Sedang bentuk kedua adalah bentuk hiperbolik. Persamaan pertama sering didapat dalam distribusi potensial, sedang persamaan kedua dalam gerakan gelombang.

Tanya : Bagaimana solusi dari persamaan umum

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u = u(x, y, t)$$

Dan apakah metode ini menyelesaikan pembuatan program dari solusi tersebut ?

Jawab : Ada dua cara menyelesaikan persamaan tersebut, yaitu cara analitis dan cara digital. Cara analitis tidak dibahas dalam kollokium. Dan yang dibahas adalah cara digital. Di sini daerah masalah dibagi atas daerah grid, dan persamaan parsial dirubah menjadi bentuk persamaan diferensi. Untuk menyelesaikan harus menggunakan komputer berarti harus dibuat program komputer untuk menyelesaikan masalah.

### 2. WILSON SINAMBELA

Tanya : Apa artinya tidak ada fluks panas pada bidang yang tegak lurus sumbu  $x$  dan  $y$  ?

Jawab : Artinya diisolir, dan dalam pengertian matematika adalah  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  dan  $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ . Hal ini perlu agar dapat dipecahkan persamaan diferensialnya.

Tanya : Bila diambil grid bujursangkar apa syarat-syaratnya untuk menentukan  $\Delta x$ , dan  $\Delta y$  bila diaplikasikan di meteo. Karena keadaan sebenarnya bukan bujursangkar, tetapi "irregularity"

Jawab :  $\Delta x$  dan  $\Delta y$  diambil menurut bentuk penelitian. Dalam hal skala besar, dapat diambil 200-300 km. Dalam hal ini turbulensi tidak terdeteksi. Tetapi pada penelitian skala kecil, misalnya di lapisan permukaan, dapat diambil  $\Delta x$  sekitar 10 km. Di sini bentuk yang ditinjau bujursangkar, tentu keadaan sebenarnya tidak teratur. Dalam hal ini komputasinya akan lain. Untuk yang tidak teratur, dapat dilihat pada makalah kami di kumpulan makalah pada seminar perpindahan panas 1987 di Yogyakarta.

Tanya : Persamaan diferensial yang ditunjukkan hanya bergantung pada posisi, Bagaimana penyelesaiannya, kalau bentuk mengandung faktor lain ?

Jawab : Faktor yang dominan adalah ruang dan waktu. Ruang menyatakan posisi, Kalau ada konstanta lain misalnya  $\rho$ , kecepatan angin dan lain-lain, akan menghasilkan persamaan diferensial yang lain pula, dan solusinya juga akan lain.

- - - oo0oo - - -