PENGGUNAAN KUADRATUR GAUSS–CHRISTOFFEL UNTUK MENENTUKAN KETINGGIAN SEBENARNYA LAPISAN IONOSFER

Oleh Slamet Syamsudin *)

RINGKASAN

Kuadratur Gauss-Christoffel merupakan perluasan bentuk integrasi numerik dari metoda Gauss, yaitu dengan mencari harga-harga nol fungsi integrand. Disamping itu fungsi tersebut mempunyai sifat orthogonal pada interval tertentu.

Dengan metoda tersebut maka ketinggian sebenarnya lapisan ionosfer pada frekuensi tertentu f_v *dapat ditentukan dengan menyelesaikan bentuk integrasi, yang mana fungsi integrandnya ditransformasikan ke dalam polinom cosinus derajat n dengan fungsi pemberat satu.*

Dalam hal ini digunakan beberapa assumsi yaitu antara lain pengaruh tumbukan dan medan maknit bumi diabaikan.

1. PENDAHULUAN

Berbagai macam teori telah dicoba untuk mendapatkan ketinggian sebenarnya dari lapisan ionosfer antara lain oleh Rydbeck, Pekeris dan Manning.

Dalam pembicaraan ini untuk mendapatkan ketinggian sebenarnya pada frekuensi tertentu f_v digunakan metoda kuadratur Gauss-Christoffel. Caranya dengan membaca $h'(f_k)$ dari data ionosonda h'-f untuk setiap f_k di mana $f_k = f_v \cos \Theta_k$, kemudian diambil harga rata-rata dari $h'(f_k)$, maka harga inilah merupakan harga pendekatan dari ketinggian sebenarnya lapisan ionosfer. Tingkat ketelitian ini akan tergantung pada banyaknya frekuensi f_k yang dicoba pada ionogram h'-f.

*) Staf Kelompok Penelitian Ionosfer.

Teori kuadratur Gauss-Christoffel merupakan teori umum yang dapat digunakan pada problema lain seperti halnya yang dilakukan oleh Friedman pada waktu menentukan lintasan grup pada beberapa tipe lapisan ionosfer untuk propagasi dengan mengikut sertakan medan maknit bumi.

2. TEORI KUADRATUR GAUSS-CHRISTOFFEL

Seperti dijelaskan dalam ringkasan bahwa kuadratur Gauss-Christoffel merupakan perluasan dari kuadratur Gauss, hal demikian karena fungsi yang diintegralkan harus orthogonal dan mempunyai harga-harga nol pada interval $[a,b]$. Maka dari itu kita ingatkan pengertian fungsi-fungsi yang orthogonal.

Apabila $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots + a_nx^n$ yang merupakan polinomial derajat n dan w (x) merupakan fungsi yang non negatip yang kita sebut sebagai fungsi pemberat pada interval $[a,b]$ dan

$$\int_a^b w(x)\,dx = \text{ada} \tag{2-1}$$

maka polinom p_n (x) dikatakan orthogonal pada interval $[a,b]$ dengan fungsi pemberat w(x) jika memenuhi :

$$\int_a^b p_n(x)\,p_m(x)\,w(x)\,dx = 0 \quad \text{jika} \quad m \neq n \tag{2-2}$$

dan

$$\int_a^b \{p_n(x)\}^2\,w(x)\,dx = 1 \quad \text{jika} \quad m = n \tag{2-3}$$

Sebagai contoh fungsi yang orthogonal adalah polinom Legendre dengan fungsi pemberat 1 pada interval $[-1,1]$.

Adapun teori kuadratur Gauss-Christoffel adalah sebagai berikut :

jika x_j (j = 1,2,3, ... n) merupakan akar palinom $p_n(x)$ dan g(x) merupakan polinom derajat 2n-1 maka ada bilangan riil λ_j (j = 1,2,3,...n) sedemikian hingga berlaku

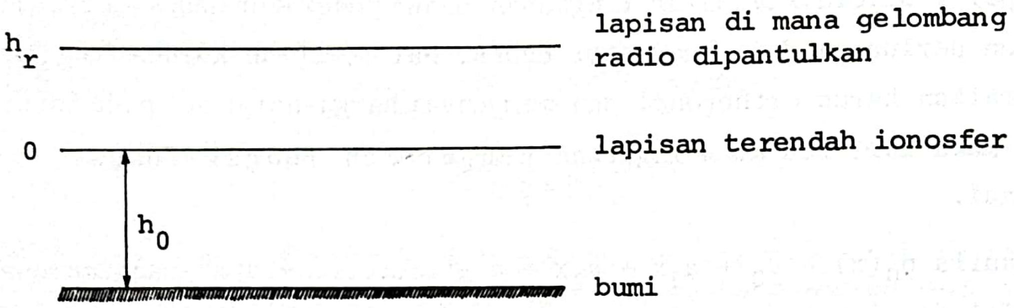
$$\int_a^b g(x)w(x) = \lambda_1\,g(x_1) + \lambda_2\,g(x_2) + \lambda_3\,g(x_3) + \ldots\ldots \lambda_n\,g(x_n) \tag{2-4}$$

di mana w(x) merupakan fungsi pemberat pada interval [a,b].

3. PENGGUNAAN TEORI GAUSS-CHRISTOFFEL

Jika medan maknit bumi dan tumbukan diabaikan, maka ketinggian semu untuk frekuensi f yang dipancarkan dari $h = 0$ s/d $h = h_r$ ditulis dengan rumus :

$$h'(f) = \int_0^{h_r} \mu' dh \qquad (3\text{-}1)$$



Gambar 1.1

Menurut Appleton $\mu^2 = 1 - x^2 \quad \rightarrow \quad \mu = \sqrt{1 - x^2}$

Karena $\mu'.\mu = 1$

maka $\mu' = \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{f_o}{f}\right)^2}} \qquad (3\text{-}2)$

di mana : μ' = indek bias group
μ = indek bias fase

Dari (3-1) dan (3-2) didapat :

$$h'(f) = \int_0^{h_r} \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{f_o^2}{f^2}}} dh \qquad (3\text{-}3)$$

$$= f \int_0^{h_r} \frac{dh}{\sqrt{f^2 - f_o^2}} \rightarrow$$

$$\frac{h'(f)}{f} = \int_0^{h_r} \frac{dh}{\sqrt{f^2 - f_o^2}} \qquad (3\text{-}4)$$

jika $\xi = f_o^2$ dan $F = f^2$; $\mu(\xi)d\xi = dh$ maka (3-4) menjadi :

$$\frac{h'(f)}{f} = {}_{o}\int^{F} \frac{\mu(\xi)\,d\xi}{\sqrt{F-\xi}}$$

digandakan dengan $\displaystyle {}_{o}\int^{\zeta} \frac{dF}{\sqrt{\zeta - F}}$

$$\frac{h'(f)}{f}\; {}_{o}\int^{\zeta} \frac{dF}{\sqrt{\zeta - F}} = {}_{o}\int^{F} \frac{\mu(\xi)\,d\xi}{\sqrt{F-\xi}} \cdot {}_{o}\int^{\zeta} \frac{dF}{\sqrt{\zeta - F}} \qquad (3\text{-}5)$$

Jika $\zeta = f_v^{\,2}$ dan $dF = 2fdf$ maka (3-5) menjadi :

$$\frac{h'(f)}{f}\; {}_{o}\int^{f_v} \frac{2fdf}{\sqrt{f_v^{\,2} - f^2}} = {}_{o}\int^{\xi} \mu(\xi)\,d\xi \;.\; {}_{\xi}\int^{\zeta} \frac{dF}{\sqrt{\zeta - F}\,\sqrt{F-\xi}}$$

$$2\;{}_{o}\int^{f_v} \frac{h'(f)}{\sqrt{f_v^{\,2} - f^2}}\, d_f = \pi\; {}_{o}\int^{\xi} \mu(\xi)\,d\xi$$

$$\frac{2}{\pi}\;{}_{o}\int^{f_v} \frac{h'(f)}{\sqrt{f_v^{\,2} - f^2}}\, d_f + h_o = h_T(f_v) \qquad (3\text{-}6)$$

Bentuk inilah yang akan kita evaluasi, merupakan ketinggian sebenarnya pada frekuensi f_v.

Jika kita substitusikan $x = \dfrac{f}{f_v}$ (3-7)

maka (3-6) menjadi :

$$h_T(f_v) = \frac{2}{\pi}\;{}_{o}\int^{1} \frac{h'(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx + h_o \qquad (3\text{-}8)$$

Ambil $\quad I = {}_{o}\int^{1} \dfrac{h'(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ (3-9)

$h'(x) = g(x)$ dan $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = w(x)$ sebagai fungsi pèmberat

Karena $h'(x) = h'(-x)$ maka $h'(x)$ merupakan fungsi genap. Jadi persamaan (3-9) menjadi :

$$I = \frac{1}{2}\;{}_{-1}\int^{1} \frac{h'(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \qquad (3\text{-}10)$$

Jika pada persamaan (3-10) disubstitusikan dengan $x = \cos\theta$ (3-11)

maka $\quad I = \dfrac{1}{2}\;{}_{o}\int^{\pi} h'(\cos\theta)\,d\theta$ (3-12)

Bentuk (3-12) integrandnya merupakan bentuk polinomial derajat n dari fungsi cosinus dengan fungsi pemberat 1 pada interval $(0,\pi)$, karena h'(cos θ) orthogonal tersebut maka :

$$p_o = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \; ; \; p_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \theta \; ; \; p_3 = \ldots\ldots\ldots \; ;$$

$$p_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n\theta \qquad (3\text{-}13)$$

jadi polinom yang memenuhi adalah :

$$h'(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \theta + \ldots\ldots + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n\theta, \qquad (3\text{-}14)$$

kita tinggal mencari harga-harga nolnya dan didapat :

$$\theta_k = \left(\frac{2k - 1}{2n}\right)\pi \quad \text{untuk setiap } k = 1,2,3,\ldots,n \qquad (3\text{-}15)$$

Didalam penggunaan kuadratur Gauss-Christoffel, kita tinggal menentukan konstanta pengali λ_i sesuai dengan prosedur yang dikembangkan oleh Friedman adalah sebagai berikut :

jika g(x) merupakan polinom derajat n-1 yang kita tulis

$$g(x) = C_o p_o(x) + \sum_{k=1}^{n-1} C_k p_k(x) \qquad (3\text{-}16)$$

untuk setiap j berlaku :

$$g(x_j) = C_o p_o(x_j) + \sum_{k=1}^{n-1} C_k \, p_k(x_j) \qquad (3\text{-}17)$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$$

Dengan menggunakan persamaan (3-13) didapat :

$$g(x_j) = \frac{C_o}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{n-1} C_k \cos k \frac{(2j - 1)}{2n} \pi \qquad (3\text{-}18)$$

$$\sum_{j=1}^{n} g(x_j) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} C_o + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} C_k \cos k \frac{(2j - 1)}{2n} \pi \qquad (3\text{-}19)$$

jika tanda penjumlahan pada ruas kanan dirubah maka :

$$\sum_{j=1}^{n} \cos k \frac{(2j - 1)}{2n} \pi = 0 \qquad (3\text{-}20)$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n-1$$

maka persamaan (3-19) menjadi :

$$\sum_{j=1}^{n} g(x_j) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} C_o \qquad (3\text{-}21)$$

Dengan menggunakan sifat orthogonal maka :

$$\int_o^{\pi} p_k(\theta) \, d\theta = 0$$

dan harga :

$$\int_{-1}^{1} g(x)\, w(x)\, dx = \int_{0}^{\pi} g(\theta)\, d\theta = C_o \int_{0}^{\pi} p_o d\theta + \sum_{k=1}^{n-1} C_k \int_{0}^{\pi} p_k(\theta)\, d\theta$$

$$= C_o \int_{0}^{\pi} p_o \; d\theta = \sqrt{\pi}\; C_o = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} g(x_j) \tag{3-22}$$

Kita bandingkan dengan persamaan (2-4) maka harga λ_j adalah :

$$\lambda_j = \frac{\pi}{n}$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n \tag{3-23}$$

Kembali pada persamaan (3-12) dan dengan menggunakan persamaan (3-23) didapat :

$$I = \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} h'(\cos\theta)\, d\theta$$

menjadi :

$$= \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n} h'(x_k) \tag{3-24}$$

di mana : $x_k = \cos\theta_k$

jadi :

$$h_T(f_v) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} h'(f_k) + h_o \tag{3-25}$$

Bentuk (3-25) merupakan ketinggian sebenarnya dihitung dari ketinggian h_o.
Adapun langkah-langkah diatas dapat kita urutkan sebagai berikut :

1. Kita tentukan frekuensi f_v
2. Tentukan n akar dari polinom $h'(\cos\theta)$

   yaitu :

   $$\theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi$$
3. Tentukan $f_k = f_v \cos\theta_k$
4. Baca $h'(f_k)$ pada data ionosonda
5. Kemudian ambil rata-rata dari $h'(f_k)$
6. Jika derajat polinom ganjil maka banyaknya $h'(f_k)$ yang dibaca sebanyak $\frac{n+1}{2}$ kali, dan jika derajat polinom genap maka yang dibaca $\frac{n}{2}$ kali.

CONTOH PEMAKAIAN

Jika diambil $n = 10$ dan $f_V = 2{,}5$ MHz dan digunakan data ionosonda $h' - f$, dan diambil $h_o = 100$ km maka ketinggian sebenarnya pada frekuensi f_V ditulis $h_T(f_V)$?

Dengan menggunakan rumus :

$$\theta_k = \frac{2k - 1}{2n}\pi \quad \text{dan} \quad f_k = f_v \cos \theta_k$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{20} \rightarrow \cos\frac{\pi}{20} = 0{,}987 \rightarrow f_1 = 2{,}47$$

$$\theta_2 = \frac{3\pi}{20} \rightarrow \cos\frac{3\pi}{20} = 0{,}891 \rightarrow f_2 = 2{,}23$$

$$\theta_3 = \frac{5\pi}{20} \rightarrow \cos\frac{5\pi}{20} = 0{,}707 \rightarrow f_3 = 1{,}77$$

$$\theta_4 = \frac{7\pi}{20} \rightarrow \cos\frac{7\pi}{20} = 0{,}454 \rightarrow f_4 = 1{,}14$$

$$\theta_5 = \frac{9\pi}{20} \rightarrow \cos\frac{9\pi}{20} = 0{,}156 \rightarrow f_5 = 0{,}39$$

jadi ketinggian sebenarnya pada frekuensi 2,5 adalah :

$$\begin{aligned} h_T(2{,}5) &= \frac{1}{5}\,[\,h'(2{,}47) + h'(2{,}23) + h'(1{,}77) + h'(1{,}14) \\ &\quad + h'(0{,}39)] + 100 \\ &= \frac{1}{5}\,[17 + 16{,}5 + 16 + 16 + 7] + 100 \\ &= 114{,}5 \text{ km} \end{aligned}$$

4. PENUTUP

Pada penelitian ionosfer penentuan ketinggian sebenarnya lapisan ionosfer bermanfaat sekali misalnya untuk menentukan profil kerapatan elektron atau parameter fisis yang lain. Ternyata metoda kuadratur Gauss Christoffel ketepatannya akan tergantung pada penentuan derajat polinom n. Jika n makin besar maka hasil perhitungannya makin baik.

DAFTAR PUSTAKA

1. JOHN M. KELSO : "The Determination of the Elektron Density Distribution of an Ionosphere Layer" Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, 1954

2. A.F. GALKIN, M. YEROVEYEV, E.S. KASIMIROVSKY AND V.D. KOKOUROV : "Ionospheric Measurements" NASA Washington D.C., Juli 1974.

3. R.L.F. BOYD and M.J. SEATON : "Rocket Exploration of the Upper Atmosphere", Pergamon Press Ltd. London 1970.

4. ROBERT A. HELLIWELL : "Whistlers and Related Ionospheric Phenomena", Stanford University Press, 1965.

- - - o0o - - -

D I S K U S I

1. MASPUL AINI

Tanya : Apa yang dimaksud dengan f_v, f dan f_o ?

Jawab : f_v adalah frekuensi tertentu yang akan kita cari ketinggian sebenarnya sebagai contoh untuk frekuensi $f_v = 2,5$ maka ketinggian sebenarnya setelah dihitung adalah : $h_T(2,5) = 114,5$ km.

f adalah frekuensi kerja

f_o adalah frekuensi plasma

Tanya : Apa kegunaan sifat orthogonal dalam masalah ini ?

Jawab : Sifat orthogonal berguna untuk mencari koefisien dari polinom fungsi cosinus.

Tanya : Apakah harga nol yang dimaksud untuk $h'(f_k)$?

Jawab : Setelah disubstitusikan $f_k = f_v \cos \theta_k$ maka polinomnya menjadi $h'(f_v \cos \theta_k)$ jadi harga-harga nolnya adalah harga

$$\theta_k = \frac{(2k - 1)\pi}{2n}$$

Tanya : Frekuensi yang berbeda menghasilkan ketinggian yang berbeda ?

Jawab : Tidak selalu berbeda, seperti terlihat dalam grafik.

Tanya : Apa maksudnya dalam pengintegrasian diberi indeks i dan j ?

Jawab : Disini berlaku indek j saja (bisa juga i), di mana : $j = 1, 2, \ldots\ldots, n$. Hal yang demikian karena rumus dari kuadratur Gauss-Christoffel.

2. CHUNAENI LATIEF

Tanya : Mohon dijelaskan bagaimana pengambilan/penentuan k dan n ?

Jawab : Harga n adalah tetap misalnya 10, 20, dan seterusnya tergantung dari keinginan kita, tetapi jika n makin besar hasilnya makin baik sedangkan k adalah banyaknya pengamatan yang tergantung.

Jika n ganjil banyaknya pengamatan adalah $\frac{n+1}{2}$

jika n genap banyaknya pengamatan adalah $\frac{n}{2}$

Karena pengamatan selebihnya dari $\frac{n+1}{2}$ dan $\frac{n}{2}$ sampai ke n akan menghasilkan harga $\cos \theta_k$ negatip jadi frekuensi negatip sedangkan frekuensi negatip tidak dipakai.

Tanya : Apakah ada metoda lain untuk menentukan ketinggian sebenarnya lapisan ionosfer ?

Jawab : Ada, misal yang dilakukan oleh Rydbeck, Pekeris dan Manning dan lain-lain.

3. J. SOEGIJO

Tanya : Apa sudah pernah dihitung pengaruh tumbukan dan medan maknit sehingga dapat mengambil kesimpulan untuk diabaikan ?

Jawab : Sudah tetapi dengan metoda lain.

Tanya : Kalau masih ada cara lain untuk metoda perhitungan ini, apa dasarnya dipilih metoda ini (apakah metoda ini yang terbaik)?

Jawab : Cara lain memang ada seperti yang dilakukan oleh Rydbeck, Pekeris dan Manning, sedangkan dasar pemilihan metoda kuadratur Gauss-Christoffel adalah pemakaian metoda numerik didalam penelitian, dan hasilnya kita belum bisa mengatakan yang terbaik karena belum mencoba metoda yang lain.

4. SLAMET SARASPRIYO

Tanya : Bagaimana cara menentukan titik O ?, apakah h_o dapat diambil sekehendak ?

Jawab : Titik O diambil pada lapisan paling bawah dari ionosfer, dan pengambilan h_o tergantung dari tinggi lapisan paling rendah. Terlihat pada gambar (1.1).

Tanya : Jika diambil n = 10 ; apakah harus ada 10 ionogram ? jika hal ini benar, bagaimana pengaruh waktu pengambilan sample.

Jawab : Kita cukup mengambil satu data ionosonda, karena n adalah derajat polinom, seperti tertera dalam contoh pemakaian, jadi pengambilan sample tidak terpengaruh pada waktu.

Tanya : Apakah pemancaran gelombang f ini harus selalu tegak lurus dengan bidang ionosfer ?

Jawab : Pemancaran gelombang f jelas tegak lurus, karena data yang dipakai adalah data ionosonda yang didapat dari data vertikal sounding (ionosonda variabel).

5. JOHN MASPUPU

Tanya : Atas dasar apa dipilih kuadratur Gauss-Christoffel ?

Jawab : Lihat jawaban nomor 3 (tiga), jawaban ke dua.

Tanya : Apakah setiap fungsi dapat ditransformasikan ke dalam polinom cosinus ?

Jawab : Dalam hal ini kita tidak berbicara transformasi, kita hanya mensubstitusikan bentuk cosinus, sehingga polinomnya menjadi polinom cosinus.

6. BINSAR GULTOM

Tanya : h'(cos θ) arthogonal dengan fungsi apa ?

Jawab : Arthogonal dengan fungsi pemberat 1.

Tanya : Apa perlunya ke "orthogonalan" tersebut ?

Jawab : Lihat jawaban nomor 1 (satu), jawaban ke dua.

Tanya : Apa gunanya λ_1, λ_2, λ_3, ... λ_n, apakah ini yang disebut akar karakteristik ?

Jawab : Rumus kuadratur Gauss-Christoffel seperti terlihat pada persamaan (2-4), dan harga-harga tersebut bukan akar karakteristik tetapi merupakan bilangan riel yang harus dicari yang memenuhi rumus kuadratur Gauss-Christoffel, beda dengan akar-akar karakteristik yaitu :

$$k = \left(\frac{2k - 1}{2n} \right) \pi$$

Tanya : Apakah ada "basis" dari ruang di mana rumus tersebut berlaku ?

Jawab : Ada yaitu basis dimensi dua.

--- oOo ---