

TEKNIK KOMBINASI ADVANCING FRONT DAN DELAUNAY DALAM ADAPTASI GRID UNTUK ALIRAN SUPERSONIK

Casmara¹, D.K. Natakusumah¹, B. Basuno¹, A.E. Sakya², Sularso¹

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menerapkan persamaan Euler pada aliran supersonik dengan teknik adaptasi grid tak-berstruktur. Grid tersebut dihasilkan dengan menggunakan kombinasi teknik Advancing Front dan teknik Delaunay. Persamaan Euler didiskritisasi dengan mempergunakan metode cell-vertex volume hingga yang kemudian diintegrasikan terhadap waktu dengan menggunakan teknik integrasi Runge-Kutta. Prosedur adaptasi grid dimulai dari grid yang relatif kasar, kemudian pada iterasi adaptasi, grid tersebut mengalami perapatan atau perenggangan melalui suatu sensor yang diperoleh dari solusi perhitungan sebelumnya. Prosedur adaptasi tersebut diaplikasikan pada airfoil NACA0012 dan pada iterasi kedua dari adaptasi grid, solusi yang akurat dengan perapatan grid di daerah tertentu saja telah diperoleh.

1. PENDAHULUAN

Pola aliran di sekitar suatu benda yang bergerak dengan kecepatan supersonik dapat diperoleh dengan memecahkan persamaan Euler. Pola aliran yang dimaksud diantaranya adalah timbulnya shock di sekitar benda tersebut. Solusi persamaan tersebut dapat pula berupa beban aerodinamik, distribusi tekanan di permukaan dan distribusi kecepatan di sekitarnya. Asumsi yang digunakan dalam penggunaan persamaan Euler tersebut adalah aliran bersifat tidak viskos. Untuk aliran supersonik, persamaan Euler tersebut mudah dipecahkan karena arah gangguan aliran hanya menjalar ke arah buritan.

Pergerakan gangguan aliran ke arah tertentu tersebut, maka muncul suatu metode klasik yang disebut metode karakteristik [Anderson, Fletcher]. Metode ini mendapatkan solusi numerik dari persamaan aturnya dengan mengasumsikan bahwa aliran bersifat tunak (steady) dan tak-viskos (inviscid). Perhitungannya dilakukan di titik-titik grid yang dibuat di sepanjang garis karakteristik aliran dimana gangguan menjalar. Tetapi, untuk perhitungan pada bilangan Mach tinggi garis-garis karakteristik akan memanjang dan terdistorsi, sehingga akan menimbulkan kesalahan numerik [Anderson].

Sedangkan dalam metode beda hingga (finite difference method) atau metode volume hingga (finite volume method) grid yang digunakan lebih bebas, sehingga grid sebarangpun dapat diaplikasikan [Anderson, Fletcher]. Lebih lanjut, metode-metode tersebut dapat diaplikasikan untuk kondisi yang lain seperti aliran subsonik dan transonik dimana metode karakteristik di atas tidak dapat diterapkan [Anderson, Fletcher]. Dengan kondisi tersebut, walaupun metode karakteristik dalam pemakaiannya sangat sederhana dibanding dengan metode beda hingga maupun metode volume

¹ PAU-IR, Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung.

² IPT LAGG, BPP Teknologi, Puspiptek, Serpong, Tangerang.

hingga. kemudian ditambah dengan perkembangan komputer yang semakin cepat dan efisien, para peneliti lebih menyukai metode beda hingga atau volume hingga.

Isu yang berkaitan dengan ketelitian dan efisiensi dari suatu metode numerik merupakan tantangan yang tetap menarik untuk dilakukan dalam bidang komputasi dinamika fluida (Computational Fluid Dynamics). Dalam makalah ini, suatu prosedur untuk mendapatkan solusi persamaan Euler yang akurat dan efisien telah dan sedang dikembangkan di Laboratorium dimana penulis bekerja. Prosedur tersebut adalah teknik adaptasi grid secara otomatis untuk aliran transonik maupun aliran supersonik. Penggunaan grid tak-berstruktur seperti yang biasa dipergunakan dalam metode elemen hingga sangat membantu memudahkan dalam proses adaptasi grid, karena proses adaptasi grid adalah proses pembentukan grid yang bersifat tak-berstruktur yaitu dengan melakukan perapatan atau perenggangan di daerah-daerah tertentu saja, misalnya untuk daerah dengan gradient bertekanan yang tinggi seperti daerah *shock* akan dibutuhkan perapatan untuk mendapatkan solusi yang akurat, sedangkan untuk daerah yang lebih *smooth*, akan terjadi perenggangan grid karena grid yang dibutuhkan cukup kasar. Proses adaptasi grid yang tak berstruktur tersebut akan sulit diterapkan jika menggunakan grid berstruktur seperti yang biasa dipergunakan untuk metode beda hingga. Keunggulan lain dari grid tak-berstruktur adalah grid tersebut dapat dibuat untuk benda dengan geometri yang kompleks sekalipun seperti model airfoil dengan flaps, slat dan lain-lain.

Dalam adaptasi grid tersebut, persamaan Euler didiskritisasi dengan menggunakan metode volume hingga dengan skema cell-vertex. Alasan penggunaan metode tersebut adalah metode volume hingga dapat bekerja baik untuk grid tak-berstruktur maupun grid berstruktur. Seperti telah dibuktikan dalam beberapa literatur [Marcum, Thomson], grid beserta distribusinya sangat mempengaruhi keakuratan solusi yang akan diperoleh. Demikian pula untuk grid tak-berstruktur dalam hal ini adalah grid berelemen segitiga, jika salah satu sudut elemen segitiga membentuk sudut lebih dari 90 derajat, maka konvergensi atau kecepatan pengecilan kesalahan akan sulit, sehingga solusi akurat akan sulit diperoleh. Dalam pembentukan grid yang menggunakan teknik Advancing Front saja, elemen segitiga yang terbentuk masih banyak yang bersudut lebih dari 90 derajat. Tetapi kelebihan dari metode grid ini adalah pembentukan grid awal lebih mudah karena hanya dibutuhkan beberapa grid berelemen segitiga dimana titik-titik nodenya diberi parameter yang dapat mengatur kerapatan grid [Peraire, Casmara]. Dengan dasar ini, penulis mencoba menggabungkan teknik grid tersebut dengan teknik Delaunay yang mempunyai karakter pembentukan segitiga sama-kaki lebih baik [Watson]. Kemudian untuk menambah kinerja dari pekerjaan tersebut, grid yang telah dihasilkan oleh teknik kombinasi tersebut di atas diperbaiki distribusinya dengan melakukan proses *smoothing*.

Pada bab berikut akan dijelaskan teknik pembuatan grid tak berstruktur dari *Advancing Front* dan *Delaunay* serta proses *smoothing*. Metode volume hingga beserta skema cell-vertex akan dijelaskan sekilas dalam bab ketiga. Teknik adaptasi grid dengan menggunakan kedua metode pembuatan grid akan diberikan dalam bab selanjutnya. Hasil penerapan teknik adaptasi diatas untuk aliran supersonik pada airfoil NACA0012 diberikan dalam bab Hasil dan Diskusi. Kemudian, bab mengenai kesimpulan akan diberikan di akhir makalah ini.

2. TEKNIK KOMBINASI PEMBUAT GRID ADVANCING FRONT DAN DELAUNAY

2.1 Teknik Advancing Front.

Teknik pembuatan grid tak-berstruktur berelemen segitiga akan dijelaskan secara singkat. Teknik pembuatan grid *Advancing Front* [Peraire] tidak memerlukan informasi mengenai posisi awal distribusi grid di dalam domain perhitungan. Teknik ini hanya memerlukan suatu grid awal yang kasar yang terdiri dari beberapa segitiga besar yang melingkupi seluruh domain perhitungan yang disebut *background grid*. Tiap titik/nodal dari *background-grid* mengandung parameter yang dapat mengatur distribusi grid dan arah perapatan serta ukuran elemen yang akan dibuat di dalam domain, sehingga grid didalam domain dapat dibuat dengan mudah dan hanya memerlukan informasi yang relatif sedikit untuk memulai pembentukan grid. Parameter tersebut diatur oleh pengguna sesuai kebutuhan misalnya untuk daerah dekat permukaan, grid biasanya lebih rapat dibanding daerah lainnya maka parameter δ yang mengatur jarak nodal dibuat kecil. Demikian pula untuk daerah-daerah lainnya kerapatan dan kerenggangannya dapat diatur dengan mudah. Parameter lainnya adalah α yang berfungsi mengatur arah perapatan/perenggangan (stretching) dan (n_1, n_2) yang mengatur jumlah grid arah-x dan y dalam koordinat kartesian. Pembentukan grid di dalam domain adalah dengan melakukan interpolasi dari tiap-tiap elemen segitiga *background grid* yang nodalnya mengandung parameter grid. Dalam prosedur adaptasi grid, *background grid* dapat berupa beberapa segitiga besar yang biasa dipergunakan untuk mengawali pembuatan grid atau suatu sistem grid yang sebelumnya telah digunakan dalam perhitungan untuk mendapatkan solusi dari persamaan atur. Untuk kasus yang terakhir, solusi dari persamaan atur tersebut dipergunakan untuk mengatur distribusi grid sesuai dengan kebutuhan.

Dalam tahap awal pembuatan grid, titik-titik batas dari benda maupun titik batas medan-luar (far field) masing-masing dihubungkan menjadi segmen garis yang disebut *front*. Kemudian *front* tersebut dinyatakan dalam keadaan 'aktif'. Sementara bidang batas benda maupun batas medan-jauh selau konstan, bidang *front* akan terus-menerus berubah dan disusun kembali untuk setiap elemen baru terbentuk. *Front* yang aktif dalam hal ini didefinisikan sebagai kumpulan segmen garis yang menghadap ke domain yang belum tertutup oleh elemen segitiga. Suatu elemen baru terbentuk berarti terbentuk pula suatu nodal baru. Setiap suatu elemen baru terbentuk, maka setidaknya terdapat satu sisi/segmen yang menjadi bagian dari bidang *front* yang aktif. Bidang *front* tersebut terus maju (advance) sampai seluruh domain perhitungan tertutup oleh elemen/grid (lihat gambar-1). Dengan pergerakan *front* yang berawal dari bidang batas kearah dalam (interior) dan domain yang tertutup elemen makin besar, maka sedikit demi sedikit segmen dari *front* akan berkurang sejalan dengan berkurangnya domain yang belum tertutup dan akhirnya jumlah segmen dari *front* akan nol. Arah dari pergerakan *front* diatur oleh parameter grid yang telah didefinisikan sebelumnya.

Dalam penerapan teknik *Advancing Front* untuk benda dengan geometri yang ketebalan jauh lebih kecil dibanding dengan panjangnya, seperti pada airfoil NACA0012 dimana ketebalannya hanya 12 persen terhadap panjangnya, grid yang terbentuk kadang mempunyai sudut yang lebih besar dari 90 derajat karena untuk daerah dekat permukaan dibutuhkan grid yang mempunyai ketebalan yang relatif kecil dalam arah menjauhi permukaan dibanding dengan lebar grid dalam arah sejajar permukaan.

Berangkat dari kesulitan ini, penulis mencoba memperbaiki grid yang telah terbentuk dari *Advancing Front* dengan menerapkan teknik *Delaunay* [Watson], sehingga grid yang dihasilkan akan mempunyai sudut yang lebih kecil dari 90 derajat. Teknik *Delaunay* akan dijelaskan berikut :

2.2 Teknik Triangulasi Delaunay.

Kekurangan dari teknik triangulasi *Delaunay* adalah teknik ini tidak membentuk titik-titik / nodal dalam domain perhitungan. Teknik ini hanya melakukan penghubungan nodal-nodal yang telah tersedia ke dalam elemen segitiga sedemikian rupa sehingga segitiga yang terbentuk mempunyai sudut yang lebih kecil dari 90 derajat dan tidak saling tumpang tindih. Dasar dari triangulasi ini adalah jika suatu lingkaran dapat melalui 3(tiga) nodal dan dalam radius lingkaran tersebut tidak ada nodal lain yang tertutup/terlewati, maka dari tiga nodal tersebut dapat dibentuk suatu elemen segitiga dimana sudut-sudutnya tidak akan lebih dari 90 derajat.

Triangulasi *Delaunay* dihasilkan melalui konstruksi diagram *Voronoi* yang dibentuk berdasarkan titik-titik nodal di dalam domain. Jika ada sekumpulan titik yang terdiri dari n buah titik di suatu bidang, maka untuk setiap titik akan ada suatu daerah kecil yang lebih dekat ke titik tersebut daripada ke titik lainnya. Jika bidang kecil ini digambarkan untuk seluruh titik, maka daerah/bidang kecil yang disebut *polygon* akan tersusun menutupi seluruh domain. Konstruksi poligon ini disebut *diagram Voronoi* (lihat gambar-2a). Triangulasi *Delaunay* dibentuk dengan cara menghubungkan pasangan titik-titik yang terpisah oleh salah satu sisi bidang *polygon*. Hasil yang diperoleh dari penghubungan pasangan titik tersebut dapat dilihat pada gambar-2b dan tampak bahwa tiap sisi bidang *polygon* berjarak sama terhadap pasangan titik-titik nodal. Sehingga, titik sambung bidang *polygon* tersebut merupakan titik-pusat dari lingkaran yang melalui tiga buah titik yang telah dijelaskan di atas.

Dengan kelebihan dari teknik *Delaunay* yang dapat mentriangulasi titik yang telah tersedia menjadi elemen-elemen segitiga yang mempunyai sudut lebih kecil dari 90 derajat, sistem grid yang telah dibentuk dari teknik *Advancing Front* dapat ditriangulasi ulang melalui teknik *Delaunay*, sehingga elemen segitiga yang terbentuk berkarakter lebih baik.

Demikian penggabungan dua teknik pembuatan grid berelemen segitiga tak berstruktur yang akan dicoba dan diterapkan untuk simulasi aliran supersonik pada airfoil NACA0012 dengan proses adaptasi grid.

2.3 Perbaikan Grid Dengan Teknik Smoothing.

Walaupun grid yang dihasilkan telah dibentuk melalui kedua teknik pembuatan grid diatas, distribusi grid atau luas suatu elemen segitiga dengan luas elemen segitiga tetangganya kadangkala berbeda cukup besar, sehingga terlihat tidak kontinyu dan tidak *smooth*. Untuk mengatasi hal ini, suatu proses penyaringan diterapkan untuk melakukan *smoothing* terhadap sitem grid yang telah ada. Penyaringan tersebut disebut *Laplace* [Marcum] yang dapat ditulis sebagai :

$$X_o^{n+1} = X_o^n + \frac{\omega}{M} \sum_{i=1}^M (X_i^n - X_o^n) \quad (2-1)$$

dimana X_0^n adalah posisi suatu titik dalam iterasi ke-n, ω adalah parameter relaksasi yang ditentukan oleh pemakai dan M adalah banyaknya titik yang berposisi X_i^n dan terhubung ke titik X_0^n pada iterasi smoothing ke-n.

Proses smoothing ini harus menjamin bahwa titik-titik batas pada permukaan benda maupun pada batas medan-jauh harus tidak ikut berpindah. Besar parameter relaksasi ω bergantung pada sedikit pengalaman dari pengguna, penulis biasanya menggunakan $\omega=0.9$ dan 2 sampai dengan 5 kali iterasi untuk tiap sistem grid.

3. ALGORITMA SIMULASI ALIRAN

Persamaan atur fluida yang hanya mengabaikan efek viskositas adalah persamaan Euler. Jika variabel ρ , u , v , E dan p masing-masing menyatakan kerapatan massa, komponen kecepatan dalam koordinat kartesians, energi total dan tekanan, maka persamaan Euler untuk aliran 2-dimensi dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.1)$$

dimana vektor variabel \mathbf{W} dalam persamaan di atas adalah variabel konservasi, sedangkan \mathbf{F} dan \mathbf{G} adalah masing-masing komponen dari fluks konvektif dalam arah x dan arah- y .

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vH \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

disini H adalah enthalpy,

$$H = E + \frac{p}{\rho} \quad (3.3)$$

dan tekanan p dihitung dari hubungan berikut :

$$p = (\gamma - 1)\rho \left\{ E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right\} \quad (3.4)$$

Untuk mendapatkan solusi yang akurat pada grid tak-berstruktur, formulasi untuk prosedur diskritisasi persamaan Euler dalam kesempatan ini adalah metode volume hingga dengan skema cell-vertex.

Pada metode volume hingga, proses diskritisasi dilakukan dengan membagi-bagi domain perhitungan kedalam sejumlah sub-domain yang kecil. Kemudian dengan menuliskan persamaan atur (3.1) dalam bentuk integral dan dengan mengaplikasikan teorema Gauss diperoleh :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{W} dS + \oint_{\partial S} (\mathbf{F} dy - \mathbf{G} dx) = 0 \quad (3.5)$$

dimana S menyatakan luas kontrol-volume yang mempunyai batas dS .

Persamaan (3.5) dipergunakan untuk menghitung perubahan W rata-rata dalam suatu sub-domain. Bentuk integral tersebut mengandung pengertian bahwa sub-domain yang mengandung diskontinuitas seperti *shock*-pun diperlakukan sama. Lain halnya jika persamaan atur tersebut ditulis dalam bentuk diferensial, maka suatu asumsi diperlukan untuk sub-domain yang mengandung diskontinuitas *shock*.

Kemudian dengan skema *cell-vertex* dimana variabel tak-diketahui berada di titik vertex suatu cell, kontrol-volume merupakan gabungan beberapa cell yang mengelilingi titik vertex tersebut (lihat gambar-3). Maka persamaan (3.5) dapat ditulis,

$$\frac{\partial}{\partial t} W S + Q = 0 \quad (3.6)$$

dimana S adalah luas kontrol-volume dan Q adalah fluks konvektif yang melewati sisi-sisi dari kontrol volume.

Untuk mendapatkan solusi dari persamaan (3.6), integrasi terhadap waktu dilakukan dengan mengaplikasikan teknik eksplisit Runge-Kutta 3 (tiga) tahap. Keunggulan dari teknik ini adalah tidak diperlukannya nilai awal untuk memulai perhitungan, sehingga teknik ini cukup efektif dan populer sebagai suatu metoda untuk memecahkan persamaan Euler [Jameson]. Adapun teknik Runge-Kutta untuk persamaan (3.6) adalah :

$$w_i^0 = w_i^n$$

$$w_i^1 = w_i^0 - \alpha_1 \text{CFL} \frac{\Delta t_i}{S_i} [Q(w_i^0)]$$

$$w_i^2 = w_i^0 - \alpha_2 \text{CFL} \frac{\Delta t_i}{S_i} [Q(w_i^1)] \quad (3.7)$$

$$w_i^3 = w_i^0 - \alpha_3 \text{CFL} \frac{\Delta t_i}{S_i} [Q(w_i^2)]$$

$$w_i^{n+1} = w_i^3$$

dimana Δt_i adalah langkah-waktu, dan α_1 , α_2 dan α_3 adalah koefisien integrasi waktu yang dalam hal ini dipilih, $\alpha_1=0.6$, $\alpha_2=0.6$ dan $\alpha_3=1.0$. Sedangkan CFL (Courant Friedrichs Lewey) adalah persyaratan kestabilan untuk mendapatkan solusi numerik.

4. STRATEGI ADAPTASI GRID

Salah satu kelebihan grid tak berstruktur adalah kemudahannya untuk diterapkan dalam teknik adaptasi grid. Teknik pembuatan grid tak berstruktur telah dijelaskan dalam bab 3.

Suatu benda yang bergerak dengan kecepatan supersonik yaitu pada bilangan Mach, $M_x > 1.0$ maka akan timbul suatu shock yang disebut *bow shock*. Posisi dari *bow shock* tersebut tidak diketahui (apriori) sebelum dilakukan simulasi numerik. Untuk menangkap fenomena diskontinuitas dari aliran tersebut diperlukan grid yang cukup rapat. Untuk perhitungan tanpa adaptasi grid dan karena posisi *bow shock* tidak

diketahui sebelumnya, maka grid perlu dirapatkan hampir di seluruh domain perhitungan. Sebagai akibatnya jumlah grid yang terbentuk akan besar sekali, sehingga waktu CPU komputer dan jumlah memori komputer untuk perhitungan akan sangat besar.

Dalam teknik adaptasi grid yang dikembangkan dalam pekerjaan ini, distribusi grid diatur secara otomatis berdasarkan solusi komputasi yang diperoleh, sehingga grid akan merapat di daerah-daerah tertentu saja seperti di daerah *bow shock*. Dengan teknik adaptasi grid, jumlah grid untuk perhitungan akan jauh lebih kecil dibanding dengan perapatan grid di seluruh domain, sehingga waktu CPU dan jumlah memori komputer yang dibutuhkan akan relatif kecil. Teknik adaptasi yang dimaksud disini dikenal dengan teknik *regenerasi adaptasi grid* karena grid untuk setiap itersi grid dibentuk ulang berdasarkan solusi komputasi yang diperoleh. Seperti kita ketahui bahwa di daerah dimana suatu *shock* muncul gradien tekanan atau gradien rapat-massa akan tinggi, sehingga gradien tersebut dapat dijadikan sebagai *sensor* untuk mendeteksi adanya suatu *shock*. Untuk daerah dengan gradien tinggi, maka grid di daerah tersebut perlu dirapatkan dan sebaliknya untuk daerah dengan gradien tekanan rendah, grid perlu diregangkan. Perapatan/perenggangan grid dilakukan dengan cara memberi tanda ke tiap-tiap nodal, sehingga metode adaptasi grid dapat mendeteksi nodal mana yang perlu dirapatkan atau diregangkan. Kemudian untuk menjamin kestabilan numerik, tentu saja diperlukan suatu batasan maksimum dan minimum luas elemen atau panjang sisi dari suatu elemen segitiga yang akan dibentuk.

Pemberian tanda untuk masing-masing nodal dalam domain perhitungan berupa parameter-grid (δ , α , n_1 dan n_2) seperti telah dijelaskan dalam bab 2.1.

Adapun strategi adaptasi grid yang berdasarkan pada teknik kombinasi Advancing Front dan Delaunay adalah sebagai berikut :

- a). Membentuk suatu *background grid* secara manual yang terdiri dari beberapa elemen segitiga yang cukup besar yang melingkupi seluruh domain perhitungan (lihat gambar-4). Pada tiap-tiap nodal diberikan parameter grid sesuai kebutuhan.
- b). Melalui Teknik *Advancing Front* dan dengan informasi dari *background grid*, akan terbentuk suatu *grid-awal* yang relatif kasar, tetapi cukup baik untuk memberikan solusi sementara dari persamaan Euler.
- c). Dari solusi sementara *grid-awal*, sensor adaptasi yang berdasarkan pada gradien tekanan dapat ditentukan untuk masing-masing nodal *grid-awal*. Kemudian dengan mendefinisikan suatu *ambang-batas* yang dapat menentukan nodal mana saja yang perlu perapatan/perenggangan, maka tiap nodal masing-masing mempunyai parameter grid. Dengan *grid-awal* sebagai *background grid* dan kemudian dengan melalui teknik *Advancing Front*, maka akan terbentuk *grid-adaptasi pertama*.
- d). Selanjutnya, *grid-adaptasi pertama* diperbaiki kualitasnya dengan melakukan triangulasi ulang dengan teknik *Delaunay*. Kemudian, *grid-adaptasi* tersebut disempurnakan melalui proses (Laplace) *smoothing*. Pada tahap ini perapatan di daerah *shock* telah terjadi.
- e). Melakukan perhitungan numerik pada *grid-adaptasi pertama*, sehingga diperoleh solusi yang konvergen.

- f). Dari solusi langkah e), sensor-adaptasi diperoleh untuk seluruh domain perhitungan. Langkah selanjutnya adalah kembali ke langkah c), d) dan e) dengan grid-adaptasi pertama berfungsi sebagai *background grid* baru.
- g). Proses adaptasi berakhir bila solusi yang diperoleh telah konvergen dan cukup akurat dengan melakukan perbandingan antara hasil yang diperoleh dengan hasil numerik lain maupun dengan hasil eksperimen yang tersedia.

5. HASIL DAN DISKUSI

Sebagai kasus pertama adalah aliran supersonik pada airfoil NACA0012 dengan bilangan Mach, $M_\infty=1.2$ dan sudut serang, $\alpha=0.0$ tanpa adaptasi grid. Tujuan dari perhitungan kasus pertama ini adalah untuk memvalidasi metode yang digunakan dengan cara membandingkan dengan hasil eksperimen maupun hasil numerik lain. Jumlah titik nodal dari grid yang digunakan adalah 1967 dan jumlah elemen segitiga adalah 3766. Gambar dari grid tersebut dapat dilihat pada Gambar-5a. Grid tersebut relatif kasar terutama di daerah *leading-edge* dan *trailing-edge*, tetapi cukup baik untuk melihat kemampuan metode volume hingga yang digunakan dalam menangkap fenomena aliran supersonik. Gambar-5b memperlihatkan kontur bilangan Mach di sekitar model. Garis sonik (sonic line) yang berharga $M=1.0$ terlihat di dekat *leading-edge* model. Garis sonik ini menandai permulaan daerah supersonik yang secara berangsur-angsur terus membesar ke arah buritan (*trailing-edge*). Sedangkan kontur tekanan diberikan pada Gambar-5c. Titik stagnasi berada di *leading-edge*, kemudian tekanan berangsur-angsur mengecil ke arah buritan. Kontur di sekitar ujung depan maupun belakang sedikit berosilasi, hal ini sebagai akibat grid di daerah tersebut kurang rapat. Akibat dari kekasaran grid di daerah tersebut dapat dilihat pula pada distribusi bilangan Mach di permukaan seperti yang tersaji dalam Gambar-5d, dimana hasil numerik metode volume hingga di daerah ujung depan dan ujung belakang terjadi perbedaan dengan hasil eksperimen (dari AGARD) maupun dengan hasil numerik lain. Tetapi secara keseluruhan metode volume hingga dapat memberikan solusi yang cukup akurat, terlebih lagi jika grid yang digunakan lebih rapat.

Sebagai kasus kedua adalah aliran supersonik dengan bilangan Mach, $M_\infty=1.5$. Bilangan Mach ini dipilih supaya fenomena bow shock dapat terlihat. Sebelum menerapkan teknik adaptasi grid pada kasus ini, suatu studi dengan menggunakan suatu *regular triangular grid* dilakukan. Untuk itu 3 buah grid dicobakan untuk melihat *grid convergence* dalam menangkap fenomena *bow shock* (lihat Gambar 6). Grid *regular-triangular* pertama terdiri dari 1100 titik nodal dan 2100 elemen. Sedangkan grid kedua terdiri dari 2688 nodal dan 5248 elemen segitiga serta grid ketiga mengandung 7424 nodal dan 14592 elemen. Dari solusi yang diperoleh, dengan bertambahnya jumlah grid terutama di daerah ujung benda, *bow shock* dapat ditangkap dengan lebih tajam. Hasil pada grid ketiga dipergunakan pula sebagai pembanding terhadap hasil yang akan diperoleh dari teknik adaptasi grid.

Teknik adaptasi grid yang bekerja secara otomatis untuk kasus $M_\infty=1.5$ dengan menggunakan teknik kombinasi pembuat grid yang telah dijelaskan dalam bab-4 diperlihatkan pada Gambar-7.1. Grid awal yang dipergunakan untuk proses adaptasi grid ini terdiri dari 1967 nodal dan 3766 elemen segitiga (lihat Gambar-7.1a). Kemudian dengan prosedur adaptasi grid, grid-adaptasi pertama terbentuk dengan jumlah titik nodal adalah 2617 dan 5068 elemen (lihat Gambar-7.1b). Perapatan grid telah terjadi di

dekat ujung depan model sebagai bukti bahwa sensor adaptasi yaitu gradien tekanan telah bekerja dengan baik. Kemudian dari solusi grid-adaptasi pertama, maka grid-adaptasi kedua terbentuk dengan bertindak sebagai background grid adalah grid-adaptasi pertama. Jumlah titik nodal grid-adaptasi kedua adalah 2506 dan 4840 elemen. Grid di daerah dekat ujung depan lebih rapat dibanding dengan grid-adaptasi sebelumnya seperti terlihat pada Gambar-7.1c. Prosedur teknik adaptasi dicoba diteruskan untuk melihat apakah distribusi grid akan lebih baik dari sebelumnya. Tetapi dari Gambar-7.1d nampak jelas bahwa distribusi grid di daerah *bow shock* walaupun terlihat lebih tajam dari pada grid-adaptasi kedua, di beberapa bagian terjadi penurunan perapatan grid. Dari hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa prosedur adaptasi telah cukup akurat sampai grid-adaptasi kedua.

Hasil perhitungan terhadap ke-empat grid-adaptasi dapat dilihat pada Gambar-7.2 dan Gambar-7.3. Seperti telah dijelaskan di atas bahwa pada tahap grid-adaptasi kedua, solusi akurat untuk menangkap *bow-shock* telah tercapai.

Jika hasil yang diperoleh dari teknik adaptasi-grid dibandingkan dengan hasil yang diperoleh dari proses *grid-convergence*, maka tampak bahwa *bow shock* dari teknik adaptasi grid dapat ditangkap lebih tajam. Untuk melihat efisiensi dari teknik adaptasi grid, perbandingan dalam besar koefisien gaya drag terhadap jumlah grid yang dipergunakan disajikan dalam Gambar-8. Jumlah grid yang dibutuhkan untuk teknik adaptasi grid hanya $\frac{1}{4}$ dari jumlah grid terbesar dari proses *grid-convergence*.

6. KESIMPULAN

Teknik kombinasi pembentuk grid Advancing Front dan Delaunay telah diterapkan untuk simulasi aliran supersonik pada airfoil NACA0012. Dari solusi yang diperoleh terbukti bahwa dengan penggunaan teknik adaptasi-grid efisiensi perhitungan telah tercapai dimana solusi yang akurat diperoleh dengan penggunaan jumlah grid yang relatif lebih kecil yaitu perapatan grid hanya terjadi di daerah-daerah tertentu seperti daerah shock.

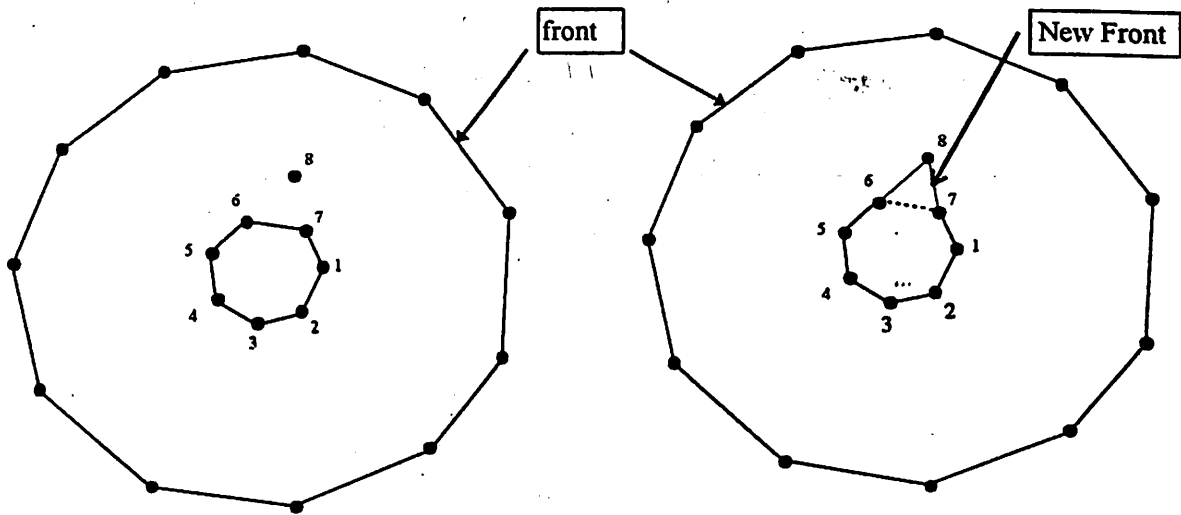
DAFTAR PUSTAKA

- Anderson J.D., 1982, "Modern Compressible Flow", McGraw Hill, New York.
- Casmara, Natakusumah D.N., Basuno B. and Sularso, 1997, "Grid Adaptation Technique for Inviscid Transonic Flow", Int. Conf. on Fluid and Thermal Energy Conversion'97, Yogyakarta.
- Fletcher C.A.J., 1990, "Computational Technique For Fluid Dynamics", Vol. I, Springer Verlag, New York.
- Jameson A., 1993, "Numerical Wind Tunnel - Vision or Reality", AIAA-93-3021.
- Marcum D.L. and Weatherill N.P., 1995, "Unstructured Grid Generation Using Iterative Point Insertion and Local Reconnection", AIAA Journal, Vol.33, No.9.
- Peraire J., Vahdati M., Morgan K. and Ziekiewicz O.C., 1987, "Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations", J. of Computational Physics, 72, pp. 449-466.

Peraire J., Peiro J., Formaggia L., Morgan K. and Ziekiewicz O.C., 1988, "Finite Element Euler Computations in Three Dimensions", Int. J. For Numerical Methods in Engineering, Vol. 26, pp.2135-2159.

Thompson J.F., Warsi Z.U.A. and Mastin C.W., 1985, "Numerical Grid Generation : Foundation and Application", North Holland, New York.

Watson D., 1981, "Computing The n-dimensional Delaunay Tesselation with Application to Voronoi Polytopes", The Comp. J., 24(2), pp. 167-172.



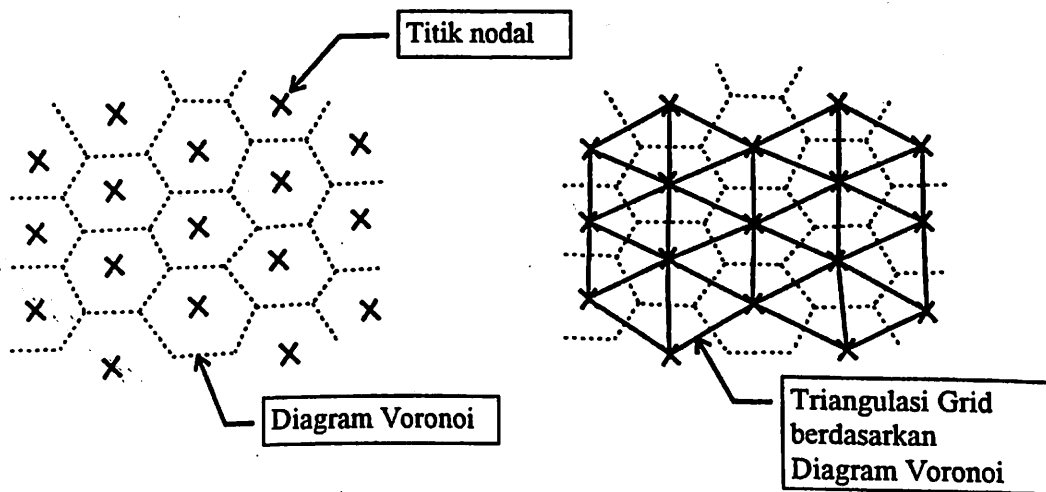
Current front :

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1

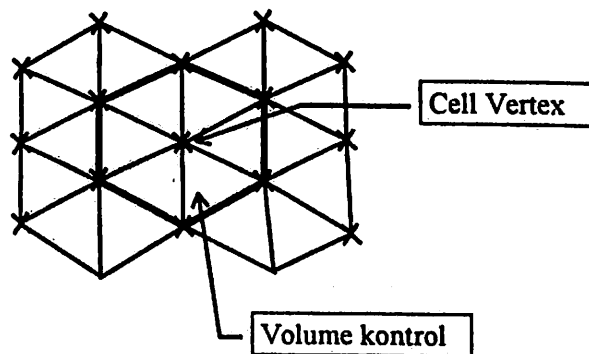
Updated front :

1	2	3	4	5	6	6	8	7
2	3	4	5	6	7	8	7	1

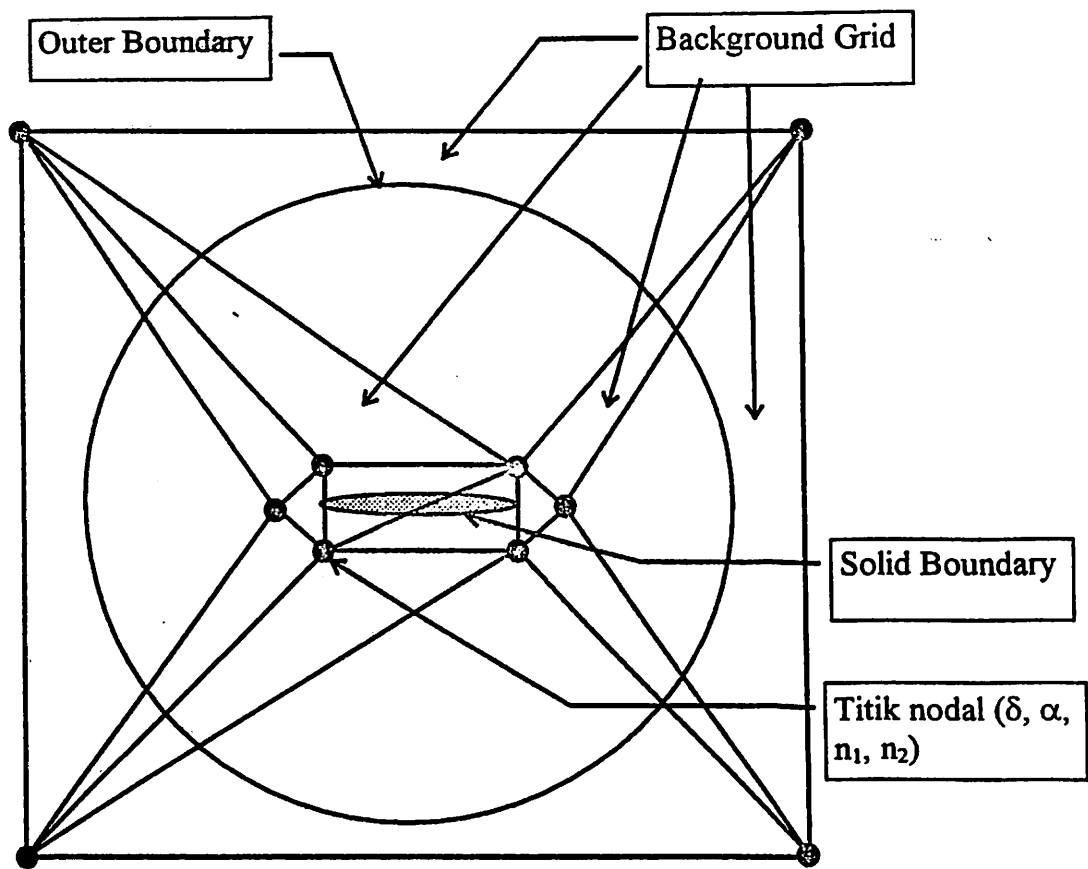
Gambar-1 : Proses pembuatan grid melalui Teknik Advancing Front.



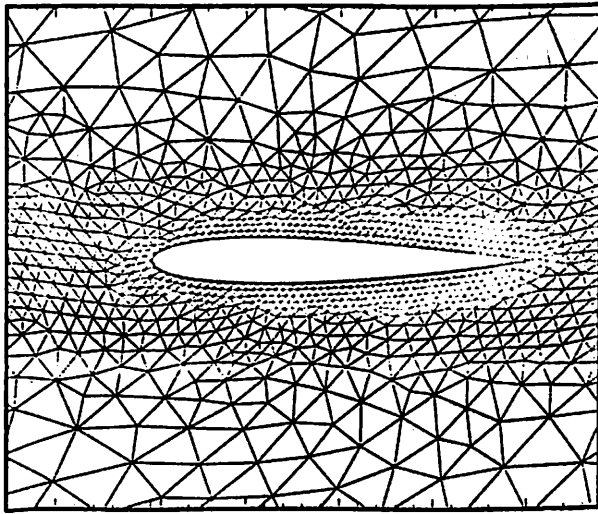
Gambar-2 : Proses triangulasi grid melalui teknik Delaunay



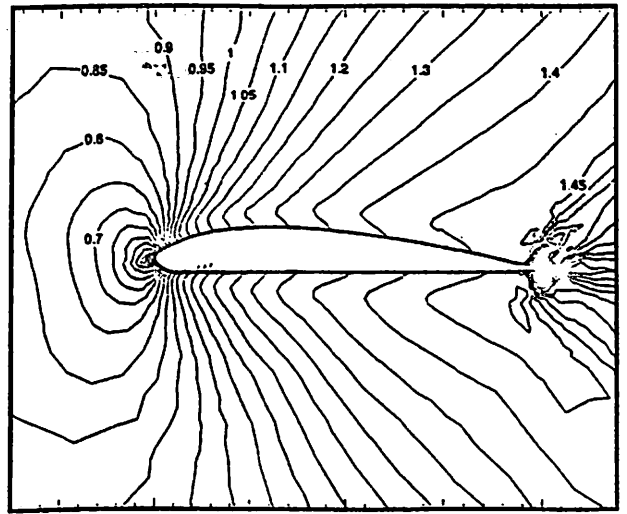
Gambar-3 Skema diskritisasi Cell-Vertex Metoda Volume Hingga



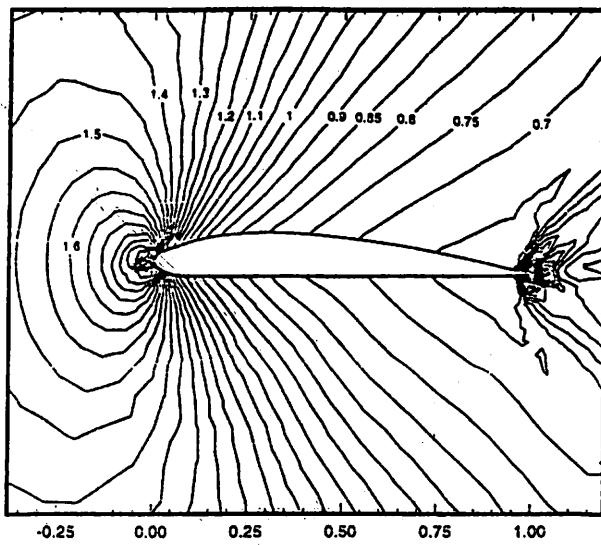
Gambar 4. Contoh pembentukan suatu background grid



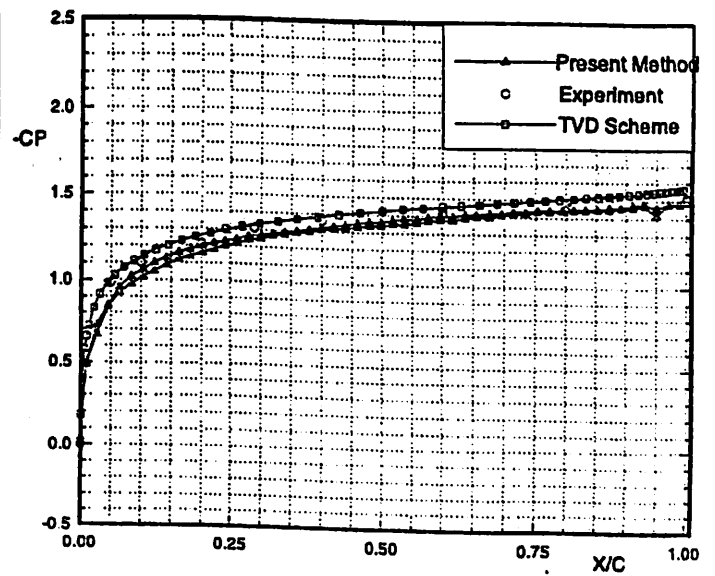
a)



b)



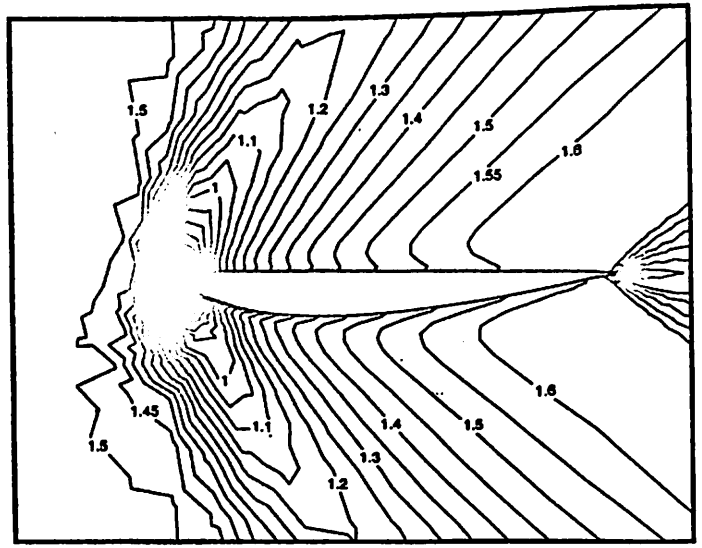
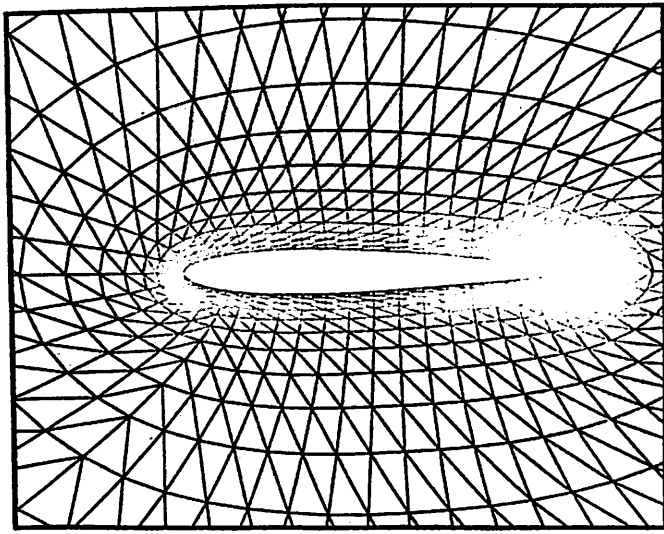
c)



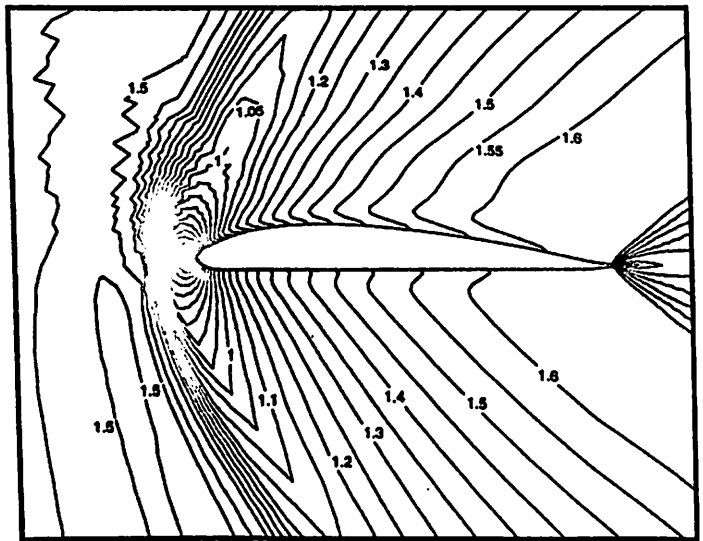
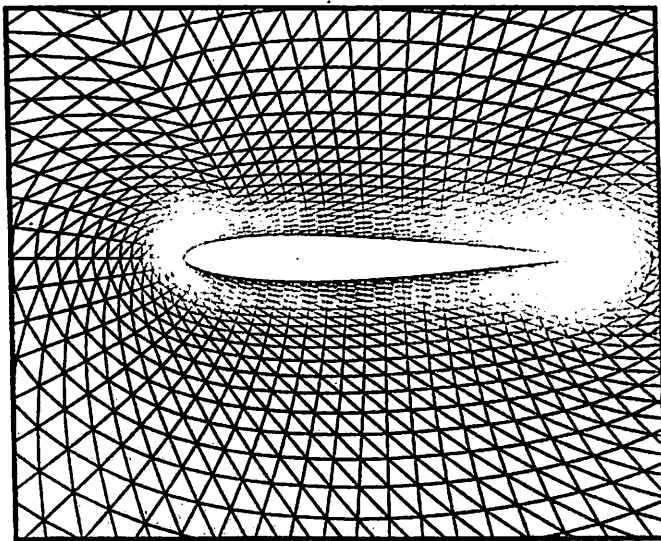
d)

Gambar-5 Aliran supersonik pada airfoil NACA0012, $M_\infty=1.2$, $\alpha=0.0$

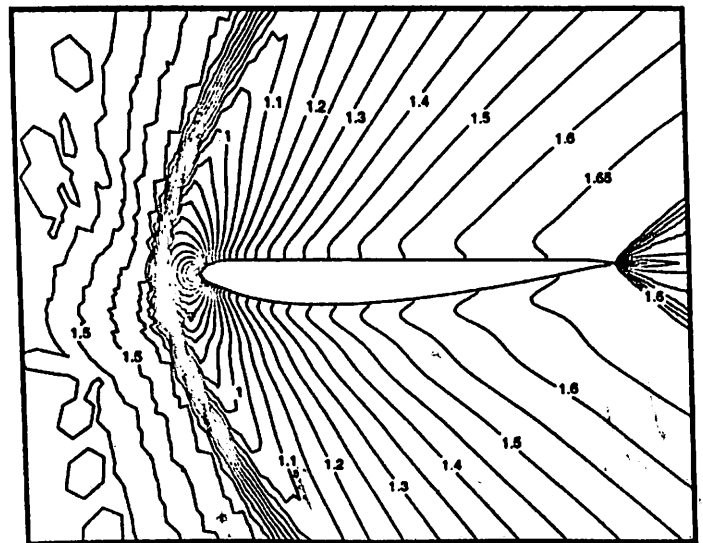
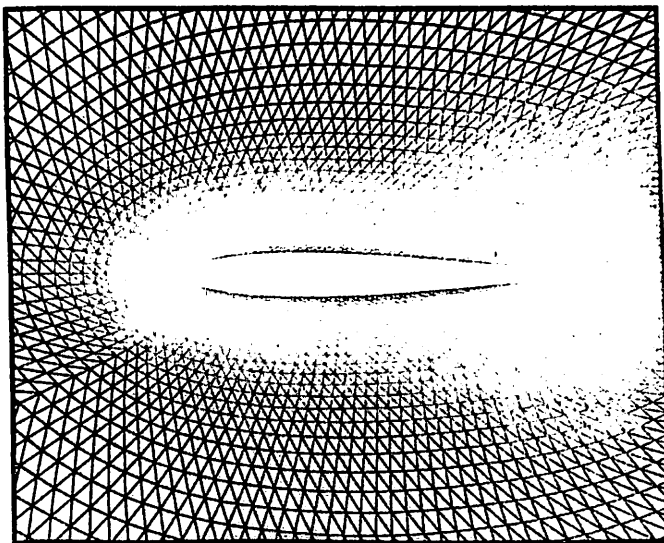
- a). Grid perhitungan
- b). Kontur bilangan Mach.
- c). Kontur tekanan
- d). Distribusi bilangan Mach di permukaan airfoil.



a)

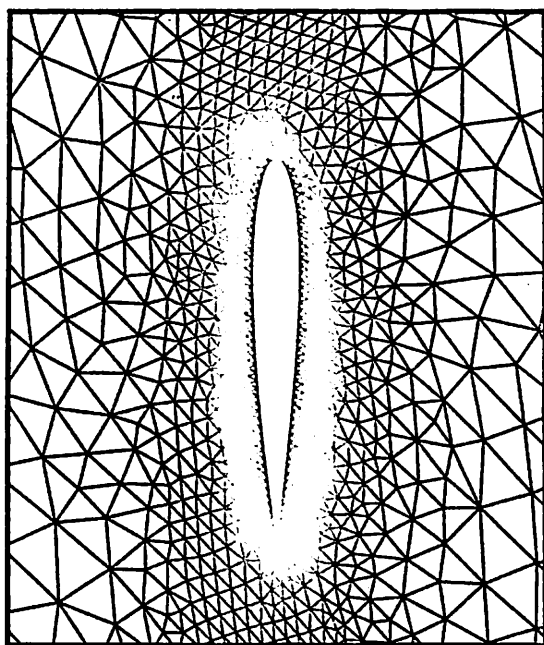


b)

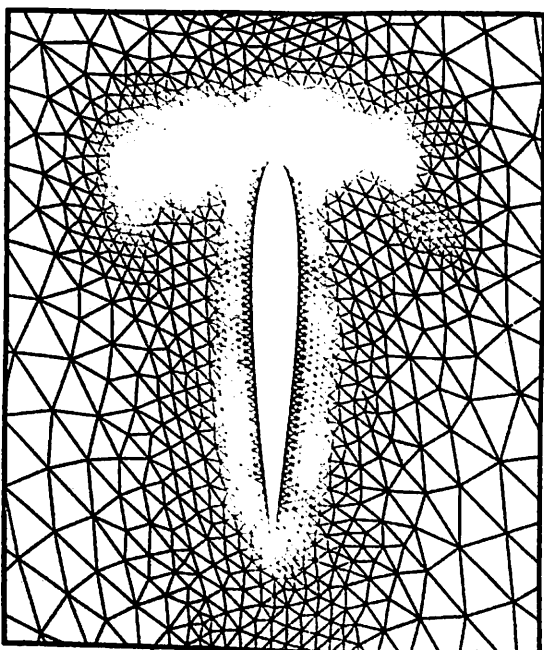


c)

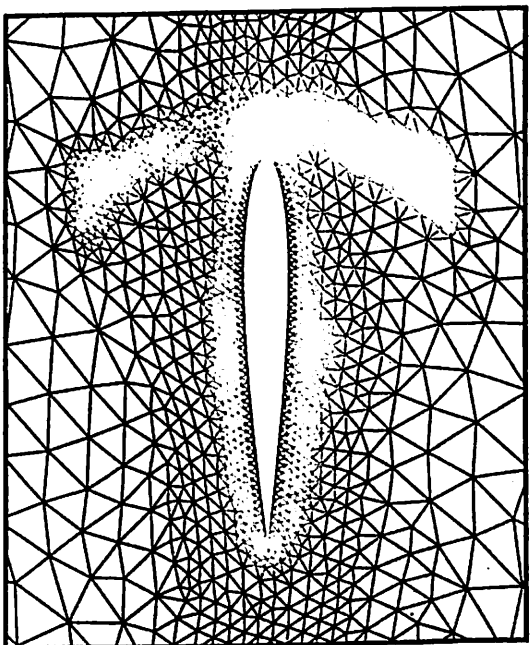
Gambar-6 Grid Convergence pada Regular Triangular Grid dengan airfoil NACA0012, $M_\infty=1.5$, $\alpha=0.0$
 a). Grid pertama (1100 nodal, 2100 elemen) dan kontur bilangan Mach
 b). Grid kedua (2688 nodal, 5248 elemen) dan kontur bilangan Mach
 c). Grid ketiga (7424 nodal, 14592 elemen) dan kontur bilangan Mach



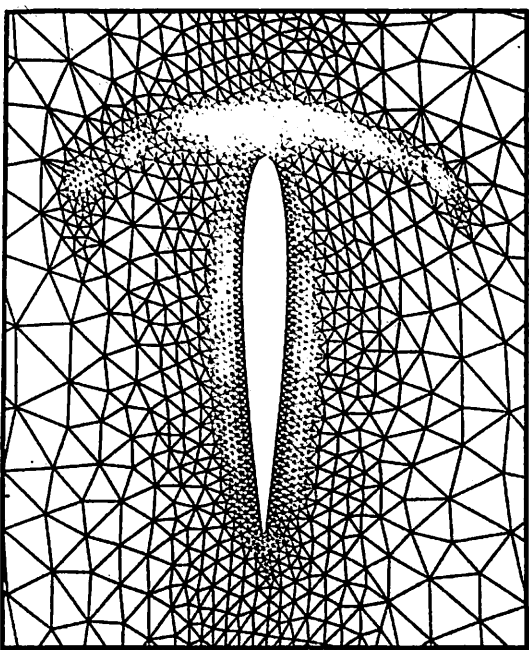
a)



b)



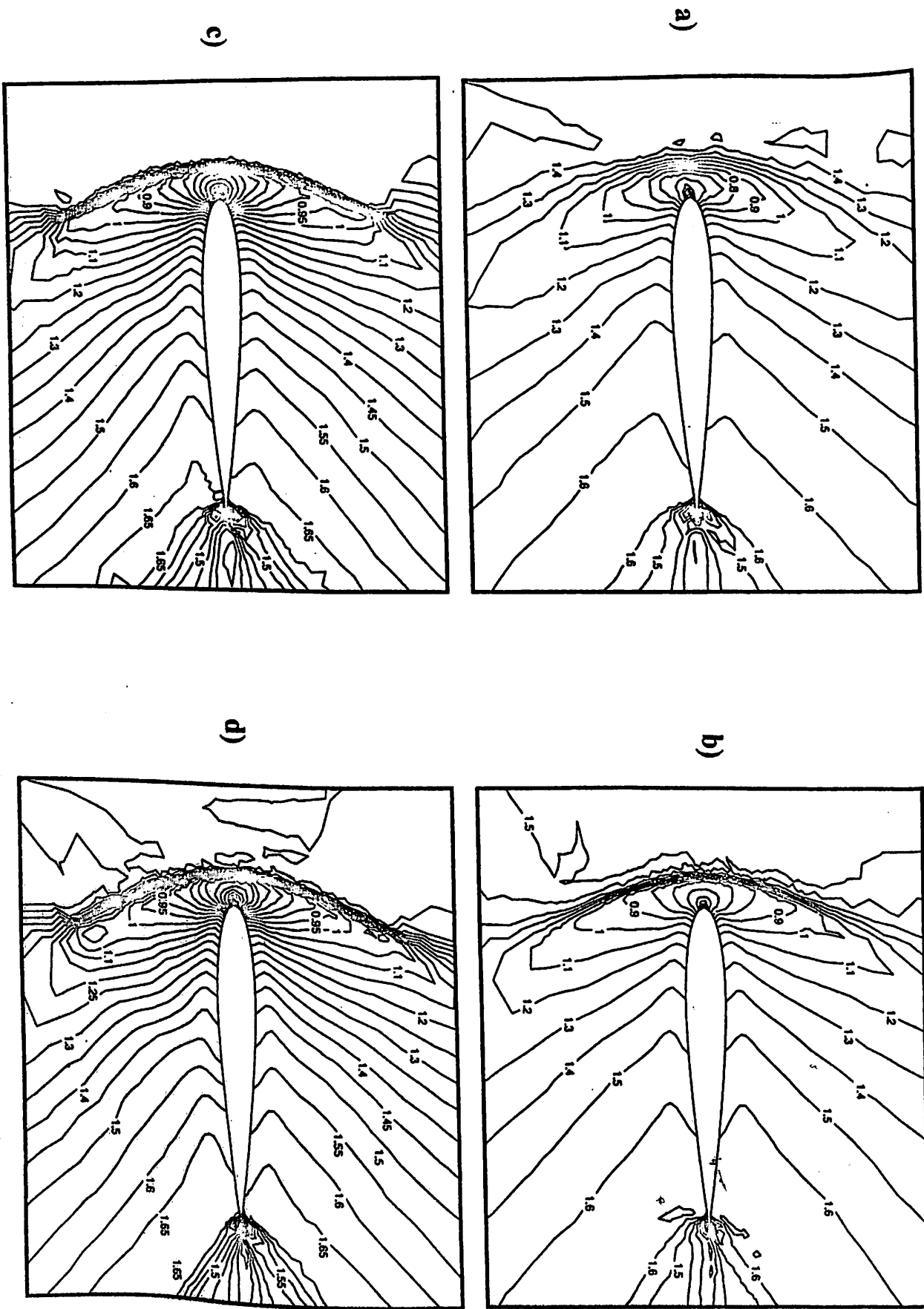
c)



d)

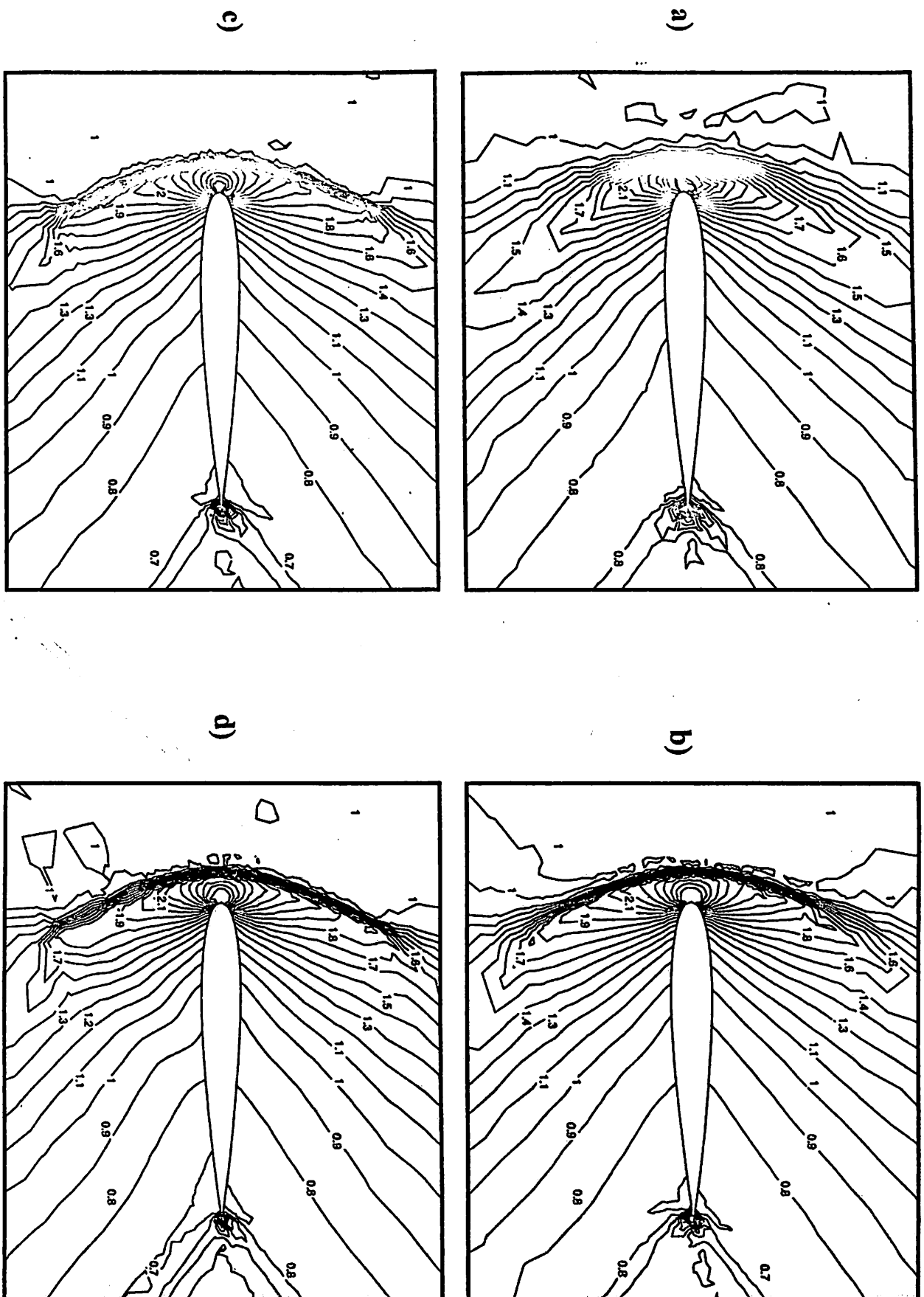
Gambar-7.1 Proses Adaptasi untuk airfoil NACA0012, $M_\infty=1.5$, $\alpha=0.0$

- a). Grid Awal (1969 nodal, 3766 elemen)
- b). Grid-Adaptasi Pertama (2617 nodal, 5668 elemen)
- c). Grid-Adaptasi Kedua (2506 nodal, 4840 elemen)
- d) Grid-Adaptasi Ketiga (2390 nodal, 4611 elemen)



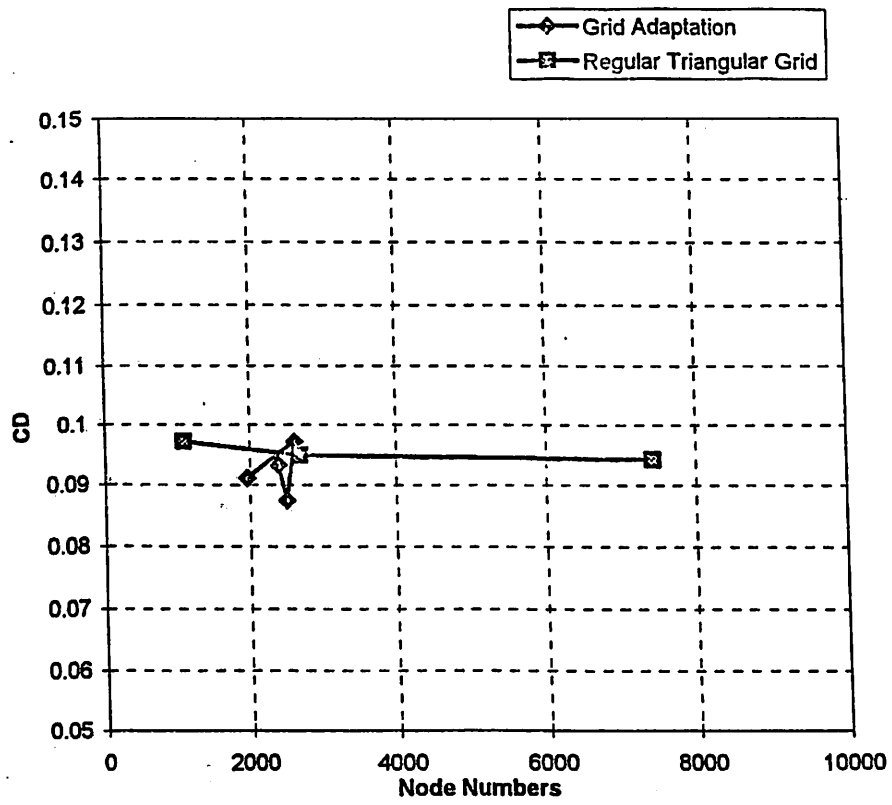
Gambar-7.2 Solusi kontur bilangan Mach Proses Adaptasi untuk airfoil NACA0012, $M_\infty=1.5$, $\alpha=0.0$

- a). Grid Awal (1969 nodal, 3766 elemen)
- b). Grid-Adaptasi Pertama (2617 nodal, 5668 elemen)
- c). Grid-Adaptasi Kedua (2506 nodal, 4840 elemen)
- d). Grid-Adaptasi Ketiga (2390 nodal, 4611 elemen)



Gambar-7.3 Solusi kontur tekanan Proses Adaptasi untuk airfoil NACA0012, $M_\infty=1.5$, $\alpha=0.0$

- a). Grid Awal (1969 nodal, 3766 elemen)
- b). Grid-Adaptasi Pertama (2617 nodal, 5668 elemen)
- c). Grid-Adaptasi Kedua (2506 nodal, 4840 elemen)
- d). Grid-Adaptasi Ketiga (2390 nodal, 4611 elemen)



Gambar-8 Perbandingan koefisien gaya Drag terhadap Jumlah grid antara Grid Adaptasi dengan Grid-Convergence