

# SIMULASI GERAK DAN ANALISIS KESTABILAN KOPLING INERSIA WAHANA DIRGANTARA DENGAN BENTUK BADAN RAMPING

Hari Muhammad, Hilman Samputra, Yazdi I. Jenie, dan Javensius Sembiring  
Kelompok Keahlian Fisika Terbang  
Fakultas Teknik Mesin dan Dirgantara  
Institut Teknologi Bandung  
harmad@ae.itb.ac.id

## ABSTRACT

Inertia coupling is a motion phenomenon of a high-speed airplane having slender body and low aspect ratio. This inertia coupling happens when the aircraft performs a roll manoeuvre motion with a high roll rate. This paper will discuss the derivation of inertia coupling equations of motion, modelling equations of motion in the Matlab/Simulink software, simulating the dynamics motion, and analyzing the stability of the inertia coupling. Numerical simulation and stability analysis of the inertia coupling for a fighter aircraft will be presented in this paper.

Keywords: *Inertia coupling, Stability analysis, Flight simulation, Slender body*

## ABSTRAK

Kopling inersia adalah fenomena gerak yang terjadi pada wahana dirgantara yang mana terjadi peningkatan kopling antara modus gerak longitudinal dengan modus gerak lateral direksional. Fenomena kopling inersia ini umumnya terjadi pada wahana dirgantara yang dirancang untuk terbang dengan kecepatan tinggi, sehingga mempunyai bentuk badan yang ramping (*slender body*) dan kelampaian atau *aspect ratio* rendah dan terjadi pada saat wahana tersebut melakukan manuver *roll* dengan kecepatan sudut *roll* yang besar. Pada makalah ini akan dibahas penurunan persamaan gerak kopling inersia, pemodelan persamaan gerak pada perangkat lunak Matlab/Simulink, serta melakukan simulasi gerak dan analisis kestabilan kopling inersia suatu wahana dirgantara. Contoh simulasi gerak dan analisis kestabilan kopling inersia untuk pesawat udara jenis *fighter* akan diberikan pada makalah ini.

Kata kunci: *Kopling inersia, Analisis kestabilan, Simulasi terbang, Slender body*

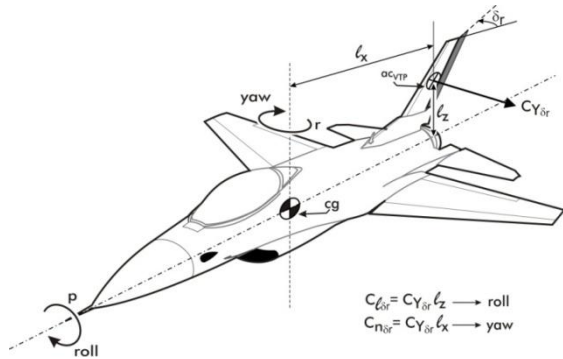
## 1 PENDAHULUAN

Kopling inersia adalah gejala dinamika terbang wahana dirgantara dimana terjadi keterpautan antara gaya dan momen inersia dengan gaya dan momen aerodinamika pada saat wahana dirgantara melakukan manuver *roll* dengan kecepatan sudut *roll* yang besar. Gejala ini umumnya terjadi pada wahana dirgantara yang beroperasi pada kecepatan tinggi dengan bentuk badan ramping (*slender body*) serta kelampaian (*aspect ratio*) yang rendah seperti bentuk

pesawat udara jenis tempur atau *fighter* [Blakelock, J.H., 1965; Etkin, B., 1972; Roskam, J., 1979].

Suatu pesawat udara konvensional akan melakukan gerak *pitch* sebagai akibat dari defleksi bidang kendali *elevator* tanpa ada kopling dengan gerak *yaw* maupun *roll*. Untuk defleksi bidang kendali *aileron*, pesawat udara akan *roll* dan akan ada kopling dengan *yaw*, begitu juga dengan defleksi bidang kendali *rudder*, maka pesawat udara akan *yaw* dan *roll*. Gerak kopling ini disebut kopling aerodinamik [Roskam,

J., 1979; Muhammad, H. dan Y.I. Jenie, 2010; Mulder, J.A., 2000]. Kopling aerodinamik terjadi karena adanya jarak titik pusat aerodinamik ekor vertikal terhadap sumbu longitudinal angin dan terhadap titik berat pesawat, yang selalu terjadi pada pesawat dengan konfigurasi konvensional, lihat Gambar 1-1.



Gambar 1-1:Kopling aerodinamik roll dan yaw pada pesawat udara konvensional

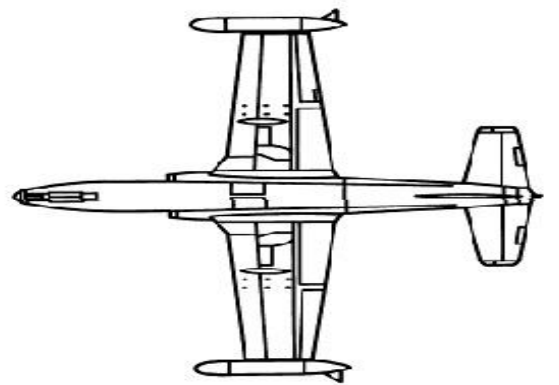
Pada pesawat udara dengan bentuk badan ramping serta memiliki kelampaian yang rendah, gerak roll akan mengalami kopling dengan gerak pitch dan gerak yaw akibat defleksi aileron saja. Akibat dari fenomena di atas persamaan gerak pesawat udara tidak dapat dipisahkan berdasarkan modulus longitudinal dan modulus lateral direksional.

Pada makalah ini, akan dibahas simulasi gerak dan analisis kestabilan kopling inersia wahana dirgantara yang mempunyai bentuk badan ramping seperti pada jenis pesawat udara tempur (*fighter*) dan jenis roket. Pembahasan dimulai dengan penjelasan fisik tentang fenomena kopling inersia, penurunan persamaan gerak kopling inersia, dan simulasi dan analisis kestabilan dari suatu wahana pesawat udara jenis *fighter*.

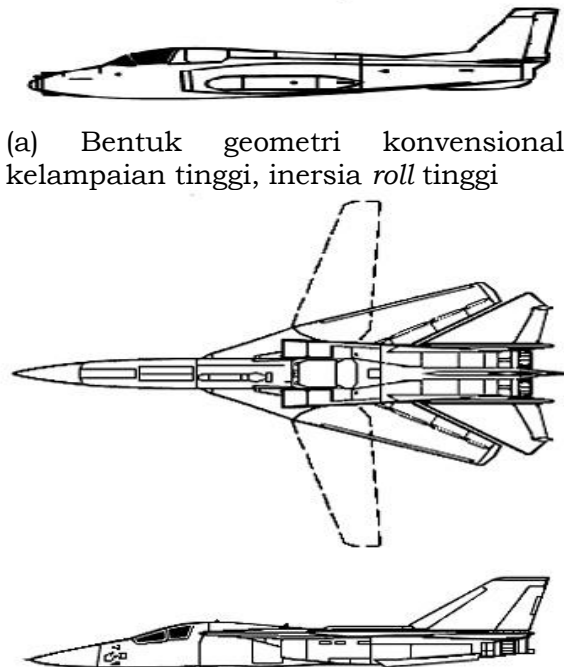
## 2 FENOMENA KOPLING INERSIA

Persyaratan aerodinamik yang ketat dalam mencapai daerah terbang supersonik, menghasilkan suatu bentuk pesawat udara yang langsing dengan sayap berkelampaian rendah. Dengan

bentuk yang langsing dan kelampaian rendah semacam ini, timbul akibat-akibat yang disebabkan oleh sifat lembam (inersia) pesawat udara tersebut. Bentuk langsing menyebabkan sebagian besar dari masa pesawat udara terdistribusikan pada sumbu longitudinal pesawat. Selain itu, rendahnya kelampaian sayap pesawat menyebabkan rentang (*span*) sayap relatif kecil sehingga kelembaman roll (*roll inertia*) pesawat tersebut rendah. Gambar 2-1 berikut mengilustrasikan hal ini.



(a) Bentuk geometri konvensional, kelampaian tinggi, inersia roll tinggi



(b) Bentuk geometri langsing, kelampaian rendah, sehingga inersia roll rendah

Gambar 2-1:Dua bentuk geometrik pesawat udara jenis *fighter*: (a) konvensional dan (b) badan langsing (*slender body*)

Yang dimaksud dengan kopleng disini adalah keterpautan antara gaya-gaya inersia kepada gaya-gaya aerodinamik pada saat pesawat udara melakukan gerakan manuver *roll*.

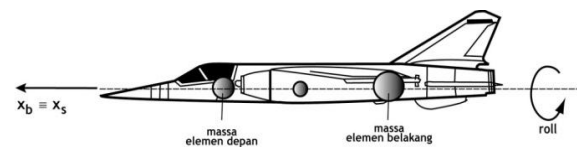
Kopleng inersia dapat dijelaskan secara fisik sebagai berikut, lihat Gambar 3-1. Dengan bentuknya yang langsing, maka dapat dianggap bahwa distribusi masa pesawat udara terkonsentrasikan pada dua tempat di sumbu longitudinal pesawat, yaitu *di muka* dan *di belakang* titik berat pesawat udara. Dalam hal ini terdapat dua tata acuan koordinat (TAK): (1) koordinat benda dan (2) koordinat kestabilan. Kedua tata acuan koordinat ini bertitik asal pada titik berat pesawat udara.

- (a) Apabila dalam kondisi terbang datar tertentu, kedua sistem koordinat berimpit, maka gerak *roll* pesawat udara sepanjang sumbu longitudinal kestabilan tidak akan mengalami kopleng inersia, lihat Gambar 3-1a;
- (b) Apabila dalam suatu kondisi terbang, sistem koordinat benda bersudut  $\alpha$  terhadap sumbu kestabilan, maka gerak *roll* sepanjang sumbu kestabilan akan menimbulkan gaya-gaya sentrifugal pada elemen-elemen masa pesawat udara di muka dan di belakang titik berat, lihat Gambar 3-1b. Akibatnya, pesawat akan mengalami *pitch* yang menyebabkan sudut  $\alpha$  semakin besar;
- (c) Pada saat pesawat telah melakukan gerak *roll*  $90^\circ$ , maka sudut serang  $\alpha$  yang terjadi berubah fungsi sebagai sudut slip samping  $\beta$ . Sudut ini akan menimbulkan momen aerodinamik yaw pada pesawat udara dan sekaligus diperbesar oleh gaya sentrifugal dari dua konsentrasi masa pesawat udara tersebut, lihat Gambar 3-1c.

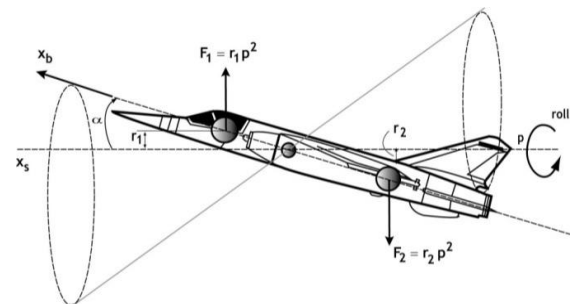
Akibatnya, pesawat akan mengalami gerakan ruang kerucut (*coning motion*) dengan sudut kerucut berosilasi membesar dan mengecil tergantung

karakteristik aerodinamika dan inersia dari pesawat udara tersebut.

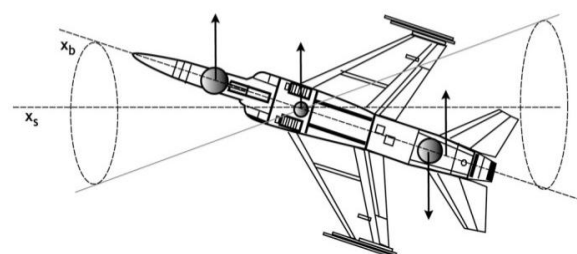
Dalam kondisi 'jungkir-balik' seperti ini apabila pesawat udara tidak stabil maka sudut kerucut dapat membesar dan pesawat udara mengalami total *stall*. Akibatnya, kecepatan jungkir-balik dapat membesar yang akhirnya dapat menyebabkan pesawat menderita beban inersia terlampau tinggi sehingga struktur pesawat mengalami *over-stress* dan akan mengakibatkan berantakannya (*disintegrated*) struktur pesawat udara tersebut.



(a) Kondisi terbang mendatar-TAK Benda dan TAK Kestabilan berimpit



(b) TAK Benda bersudut  $\alpha$  terhadap TAK Kestabilan



(c) Sudut serang  $\alpha$  berubah sebagai fungsi sudut slip samping  $\beta$

Gambar 3-1: Kopleng inersia pada pesawat udara berbadan langsing [Muhammad, H., 2010]

Perlu dicatat pula di sini bahwa pesawat konvensionalpun dapat mengalami kopleng inersia hanya kalau pesawat udara tersebut mengalami kondisi dan konfigurasi terbang dengan

sudut serang  $\alpha$  yang cukup besar. Namun demikian, apabila distribusi masa pesawat udara cukup rata (*uniform*) keadaan kopling inersia ini akan cepat teratasi.

### 3 PERSAMAAN GERAK KOPLING INERSIA

#### 3.1 Persamaan Gerak Umum

Untuk mengkaji gejala kopling inersia, dipakai suatu persamaan gerak lengkap longitudinal, lateral dan direksional pesawat udara. Persamaan ini harus mampu melukiskan kopling antara modus longitudinal dan lateral/direksional akibat gaya inersia pada manuver *steady roll*. Tujuan dari pengkajian ini adalah untuk mengetahui apakah suatu ketidakstabilan bisa terjadi dari peristiwa-peristiwa kopling inersia ini. Dengan demikian, persamaan gerak pesawat udara dapat dinyatakan dalam persamaan gerak translasi, gerak rotasi dan persamaan kinematika sudut orientasi sebagai berikut [Roskam, J., 1979; Muhammad, H. dan Y.I. Jenie, 2010; Mulder, J.A., 2000]:

#### (a) Persamaan Gerak Translasi

Persamaan gaya, atau sering juga disebut sebagai persamaan translasi untuk wahana dirgantara dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -qw + rv - g \sin \theta + \frac{F_x}{m} \\ \dot{v} &= -ru + pw + g \sin \phi \cos \theta + \frac{F_y}{m} \\ \dot{w} &= -pv + qu + g \cos \phi \cos \theta + \frac{F_z}{m} \end{aligned} \quad (3-1)$$

Pada persamaan (3-1) di atas, variabel  $u$ ,  $v$  dan  $w$  masing-masing menyatakan komponen kecepatan pada sumbu benda  $X_b$ ,  $Y_b$  dan  $Z_b$ , variabel  $p$ ,  $q$ , dan  $r$  adalah komponen kecepatan rotasi pada sumbu benda  $X_b$ ,  $Y_b$  dan  $Z_b$ , variabel  $\theta$  dan  $\phi$  adalah sudut *pitch* dan sudut *roll*,  $m$  adalah masa, dan  $F_x$ ,  $F_y$  dan  $F_z$  adalah komponen gaya total pada sumbu benda  $X_b$ ,  $Y_b$  dan  $Z_b$ .

#### (b) Persamaan Gerak Rotasi

Persamaan momen, atau sering juga disebut sebagai persamaan rotasi untuk wahana dirgantara dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= (c_1 r + c_2 p) q + c_3 L + c_4 N \\ \dot{q} &= c_5 p r - c_6 (p^2 - r^2) + c_7 M \\ \dot{r} &= (c_8 p - c_7 r) q + c_4 L + c_9 N \end{aligned} \quad (3-2)$$

dimana,

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(I_y - I_z)I_z - J_{xz}^2}{\Delta}; \quad c_2 = \frac{(I_x - I_y + I_z)J_{xz}^2}{\Delta}; \\ c_3 &= \frac{I_z}{\Delta}; \quad c_4 = \frac{J_{xz}}{\Delta}; \quad c_5 = \frac{I_z - I_x}{I_y}; \quad c_6 = \frac{J_{xz}}{I_y}; \\ c_7 &= \frac{1}{I_y}; \quad c_8 = \frac{(I_x - I_y) - J_{xz}^2}{\Delta}; \quad c_9 = \frac{1}{I_z}; \\ \Delta &\equiv I_x I_z - J_{xz}^2 \end{aligned} \quad (3-3)$$

Pada persamaan (3-2) di atas,  $L$  adalah momen *roll* aerodinamika,  $M$  adalah momen *pitch* aerodinamika dan propulsi, dan  $N$  adalah yaw aerodinamika, sedangkan pada persamaan (3-3), variabel  $I_x$ ,  $I_y$  dan  $I_z$  masing-masing adalah inersia masa terhadap sumbu benda  $X_b$ ,  $Y_b$  dan  $Z_b$ , sedangkan  $J_{xz}$  adalah inersia silang.

#### (c) Persamaan Kinematika Sudut Sikap Terbang

Hubungan antara kecepatan sudut *roll*, *pitch* dan *yaw* dengan kecepatan sudut *roll*, *pitch* dan *yaw* dinyatakan dalam persamaan kinematika sudut sikap terbang sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p + q \sin \phi \tan \theta + r \cos \phi \tan \theta \\ \dot{\theta} &= q \cos \phi + r \sin \phi \\ \dot{\psi} &= q \frac{\sin \phi}{\cos \theta} + r \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{aligned} \quad (3-4)$$

Dengan mengintegrasikan persamaan (3-1), (3-2) dan (3-4) secara simultan, akan diperoleh gerak pesawat udara dalam ruang dimensi tiga.

Apabila pesawat udara melakukan manuver *steady roll* dengan  $p = p_0$  atau  $\dot{p} = 0$ , maka momen *roll* inersia dan

momen *roll* aerodinamika pada baris pertama persamaan (3-1) akan saling meniadakan [Blakelock, J.H., 1965; Muhammad, H., 2010]. Juga, diasumsikan bahwa inersia silang  $J_{xz}$  cukup kecil sehingga bisa diabaikan [Roskam, J., 1979; Muhammad, H. dan Y.I. Jenie, 2010; Mulder, J.A., 2000]. Dengan demikian persamaan gerak translasi (3-1) dan gerak rotasi (3-2) dapat disederhanakan menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= rv - qu - g \sin \theta + \frac{F_x}{m} \\ \dot{v} &= p_0 w - ru + g \sin \varphi \cos \theta + \frac{F_y}{m} \\ \dot{w} &= qu - p_0 v + g \cos \varphi \cos \theta + \frac{F_z}{m} \quad (3-5) \\ \dot{q} &= \frac{M}{I_y} + \frac{I_z - I_x}{I_y} p_0 r \\ \dot{r} &= \frac{N}{I_z} + \frac{I_x - I_y}{I_z} p_0 q - \frac{1}{I_y} r q \end{aligned}$$

Persamaan (3-5) di atas masih berupa persamaan differensial nonlinier. Untuk linierisasi persamaan gerak di atas, diperlukan asumsi-asumsi sebagai berikut: variable  $v$ ,  $w$ ,  $q$  dan  $r$  berharga kecil, sehingga perkalian antara variabel kecil dianggap kecil dan diabaikan. Dengan asumsi-asumsi tersebut, diperoleh persamaan gerak berikut:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -qu - g \sin \theta + \frac{F_x}{m} \\ \dot{v} &= p_0 w - ru + g \sin \varphi \cos \theta + \frac{F_y}{m} \\ \dot{w} &= qu - p_0 v + g \cos \varphi \cos \theta + \frac{F_z}{m} \quad (3-6) \\ \dot{q} &= \frac{M}{I_y} + \frac{I_z - I_x}{I_y} p_0 r \\ \dot{r} &= \frac{N}{I_z} + \frac{I_x - I_y}{I_z} p_0 q \end{aligned}$$

Persamaan (3-6) di atas melukiskan gerak dua dimensi, yaitu gerak lurus sepanjang sumbu  $X_b$  dengan percepatan konstan dan *steady roll* dengan kecepatan  $p_0$ . Gerak inilah yang akan diselidiki apakah ada tendensi tidak stabil apabila terjadi kopling antara gerak longitudinal dengan gerak lateral. Namun demikian, persamaan (3-6) di atas menunjukkan bahwa, segera setelah

pesawat melaksanakan *roll*, vektor gaya berat terhadap sumbu benda akan berubah orientasinya. Hal ini akan menyebabkan pesawat keluar dari lintasan lurus sepanjang sumbu  $X_b$ . Untuk mencegah hal ini, diambil satu asumsi lagi bahwa gaya aerodinamik dan gaya berat saling meniadakan [Blakelock, J.H., 1965; Muhammad, H., 2010], sehingga:

$$\begin{aligned} -g \sin \theta + \frac{F_x}{m} &= 0 \\ g \sin \varphi \cos \theta + \frac{F_y}{m} &= 0 \\ g \cos \varphi \cos \theta + \frac{F_z}{m} &= 0 \end{aligned} \quad (3-7)$$

Substitusi persamaan (3-7) ke persamaan (3-6) diperoleh persamaan gerak pesawat udara yang sedang melakukan manuver *roll* dengan sudut *roll* konstan sebesar  $p = p_0$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -qu \\ \dot{v} &= p_0 w - ru \\ \dot{w} &= qu - p_0 v \\ \dot{q} &= \frac{M}{I_y} + \frac{I_z - I_x}{I_y} p_0 r \\ \dot{r} &= \frac{N}{I_z} + \frac{I_x - I_y}{I_z} p_0 q \end{aligned} \quad (3-8)$$

Terlihat pada baris pertama persamaan (3-8), bahwa pesawat udara akan bergerak lurus dengan kecepatan konstan  $u_0$ . Selain itu, persamaan (3-8) tidak bergantung pada persamaan kinematik (3-4) karena pengaruh sudut *roll* ( $\varphi$ ) dan sudut *pitch* ( $\theta$ ) tidak muncul.

Dengan demikian, persamaan gerak pesawat udara menjadi 5 buah persamaan dengan 4 buah variabel tak diketahui yaitu  $v$ ,  $w$ ,  $q$  dan  $r$ . Jadi persamaan gerak pesawat total akhirnya akan melukiskan gerak simultan *pitch* dan *yaw* dengan kecepatan kedepan  $u_0$  dan kecepatan sudut *roll*  $p_0$  yang konstan.

### 3.2 Persamaan Gerak Kopling Inersia

Dalam menurunkan persamaan gerak kopling inersia, dilakukan penyederhanaan terhadap persamaan gerak translasi dan persamaan gerak rotasi pesawat udara seperti diberikan pada persamaan (3-8).

Untuk alasan penyederhanaan penulisan persamaan gerak kopling inersia, didefinisikan besaran-besaran rasio inersia  $F$  dan  $G$ , sudut serang  $\alpha$  dan sudut slip samping  $\beta$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F &= \frac{I_x - I_z}{I_y} \\ G &= \frac{I_y - I_x}{I_z} \\ \alpha &= \tan^{-1} \left( \frac{w}{u_0} \right) \approx \frac{w}{u_0} \\ \beta &= \sin^{-1} \left( \frac{v}{u_0} \right) \approx \frac{v}{u_0} \end{aligned} \quad (3-9)$$

Dengan menggunakan definisi pada persamaan (3-9), maka persamaan gerak (3-8) dapat disederhanakan sebagai berikut dengan menganggap bahwa pesawat udara bergerak lurus dengan kecepatan konstan  $u_0$ .

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= p_0 \alpha - r \\ \dot{\alpha} &= q - p_0 \beta \\ \dot{q} &= \frac{M}{I_y} - F p_0 r \\ \dot{r} &= \frac{N}{I_z} - G p_0 q \end{aligned} \quad (3-10)$$

Untuk pesawat udara pada umumnya, harga rasio inersia  $F$  dan  $G$  adalah:

$$\begin{aligned} -1 < F < 0 \\ 0 < G < 1 \end{aligned} \quad (3-11)$$

Sedangkan untuk pesawat udara dengan bentuk badan yang ramping, dimana distribusi masa diasumsikan terkonsentrasi pada sumbu  $X_b$ , maka inersia masa  $I_x \approx 0$  dan  $I_y \approx I_z$ , sehingga

rasio inersia  $F$  mendekati  $-1$  dan  $G$  mendekati  $+1$  [Muhammad, H., 2010].

Selanjutnya, momen *pitch* aerodinamika  $M$  dan momen *yaw* aerodinamika  $N$  diuraikan linier fungsi dari variabel geraknya sebagai berikut [Muhammad, H. dan Y.I. Jenie, 2010; Mulder, J.A., 2000]:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} \left( C_{m_\alpha} + C_{m_q} \frac{q \bar{c}}{V} \right) \\ N &= \frac{1}{2} \rho V^2 S b \left( C_{n_\beta} \beta + C_{n_p} \frac{pb}{2V} + \dots C_{n_r} \frac{pb}{2V} \right) \end{aligned} \quad (3-12)$$

Keterangan:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho V^2 &= \text{tekanan dinamik,} \\ S &= \text{luas sayap,} \\ \bar{c} &= \text{mean aerodynamic chord sayap,} \\ b &= \text{rentang sayap.} \end{aligned}$$

Koefisien  $C_{m_\alpha}$ ,  $C_{m_q}$ ,  $C_{n_\beta}$ ,  $C_{n_p}$  dan  $C_{n_r}$  adalah turunan kestabilan dari pesawat udara. Pada persamaan (3-12), kecepatan sudut *pitch*  $q$  dibuat tidak berdimensi dengan mengalikan faktor  $\frac{\bar{c}}{V}$ , begitu juga kecepatan sudut roll  $p$  dan kecepatan sudut yaw  $r$  dikalikan dengan faktor  $\frac{b}{2V}$  dengan  $V$  adalah kecepatan terbang.

Substitusi persamaan (3-12) ke persamaan (3-10) diperoleh **persamaan gerak kopling inersial pitch-yaw** dalam bentuk persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= p_0 \alpha - r \\ \dot{\alpha} &= q - p_0 \beta \\ \dot{q} &= m_\alpha \alpha + m_q q - F p_0 r \\ \dot{r} &= n_\beta \beta + n_p p_0 + n_r r - G p_0 q \end{aligned} \quad (3-13)$$

dimana,

$$\begin{aligned} m_\alpha &= \frac{\frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c}}{I_y} C_{m_\alpha}; m_q = \frac{\frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c}}{I_y} \frac{\bar{c}}{V} C_{m_q} \\ n_\beta &= \frac{\frac{1}{2} \rho V^2 S b}{I_z} C_{n_\beta}; n_p = \frac{\frac{1}{2} \rho V^2 S b}{I_z} \frac{b}{2V} C_{n_p} \\ n_r &= \frac{\frac{1}{2} \rho V^2 S b}{I_z} \frac{b}{2V} C_{n_r} \end{aligned} \quad (3-14)$$

Persamaan (3-13) merupakan bentuk persamaan kopling inersia dengan input  $p_0$  dan output sudut slip samping  $\beta$ , sudut serang  $\alpha$ , *pitch rate*  $q$  dan *yaw rate*  $r$ . Terlihat pada persamaan (3-13) bahwa, momen *pitch* dan momen *yaw* dikopling melalui faktor *steady roll*  $p_0$  dan rasio inersia  $F$  dan  $G$ .

Untuk melihat respons gerak pesawat udara terhadap *input steady roll*  $p_0$ , pada paragraf 4 akan dilakukan simulasi numerik dengan mengambil contoh pesawat udara berbadan ramping jenis *fighter*.

### 3.3 Kestabilan Kopling Inersia

Untuk mengetahui kestabilan pesawat udara pada saat terjadi gerak kopling inersia, akan ditinjau persamaan karakteristiknya. Untuk keperluan tersebut, persamaan (3-13) ditulis dalam bentuk sistem persamaan diferensial linier  $\dot{x} = Ax + Bu$  sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p_0 & 0 & -1 \\ -p_0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_\alpha & m_q & -F^* p_0 \\ n_\beta & 0 & -G^* p_0 & n_r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ q \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ n_p \end{pmatrix} p_0 \quad (3-15)$$

Dengan mengambil determinan dari matriks  $[sI-A]$  pada persamaan (3-15) dan menyamakan dengan nol, maka diperoleh persamaan karakteristik gerak kopling inersia dalam bentuk polinomial sebagai berikut [Muhammad, H., 2010]:

$$\begin{aligned} & s^4 + (-m_q - n_r) s^3 + \dots \\ & \{ n_\beta - m_\alpha + m_q n_r + p_0^2 (1 - FG) \} s^2 + \dots \\ & \{ -n_\beta m_q + m_\alpha n_r - p_0^2 (m_q + n_r) \} s + \dots \\ & \{ p_0^2 (m_\alpha G + n_\beta F + m_q n_r - p_0^2 FG) - n_\beta m_\alpha \} = 0 \end{aligned} \quad (3-16)$$

Persamaan karakteristik gerak kopling inersia di atas merupakan persamaan *quartic* yang menyatakan gerak kopling *pitch-yaw* akibat *steady roll*  $p_0$  dan rasio inersia  $F$  dan  $G$ .

Selanjutnya akan dibahas beberapa persyaratan yang harus dipenuhi oleh pesawat udara agar tetap stabil jika melakukan gerak *steady roll* dan terjadi gejala kopling inersia. Untuk itu,

persamaan (3-16) ditulis dalam bentuk polinomial sederhana sebagai berikut:

$$s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \quad (3-17)$$

Dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz [Mulder, J.A., 2000; Muhammad, H., 2010] untuk melihat kestabilan dari persamaan karakteristik (3-17) di atas, akan ditinjau satu demi satu tanda-tanda dari koefisien yang ada pada persamaan (3-17) tersebut. Banyaknya akar karakteristik riil positif dari persamaan (3-17) ditandai dengan berapa kali koefisien persamaan tersebut berubah tanda.

**(a) koefisien:**  $a_3 = -m_q - n_r$

Terlihat bahwa untuk pesawat udara konvensional, harga  $a_3$  **selalu positif** karena harga  $C_{m_q}$  (*pitch damper*) dan  $C_{n_r}$  (*yaw damper*) selalu negatif;

**(b) koefisien:**

$$a_2 = n_\beta - m_\alpha + m_q n_r + p_0^2 (1 - FG)$$

Untuk pesawat udara yang stabil statik, maka harga  $C_{m_\alpha}$  negatif dan  $C_{n_\beta}$  positif.

Dengan melihat range  $F$  dan  $G$  pada persamaan (3-11), hasil  $FG$  selalu negatif. Dengan demikian  $a_2$  **akan selalu positif**.

**(c) koefisien:**

$$a_1 = -n_\beta m_q + m_\alpha n_r - p_0^2 (m_q + n_r)$$

Dengan memperhatikan butir (a) dan (b) di atas, maka harga koefisien  $a_1$  **juga akan selalu positif**.

**(d) koefisien:**

$$a_0 = p_0^2 (m_\alpha G + n_\beta F + m_q n_r - p_0^2 FG) - n_\beta m_\alpha$$

Disini terlihat jelas bahwa  $a_0$  **dapat positif atau negatif** tergantung pada harga  $p_0$ ,  $F$  dan  $G$ . Untuk setiap  $p_0$ , harga  $a_0$  akan mengecil bila  $F \rightarrow -1$  dan  $G \rightarrow +1$ .

Dengan harga  $a_0$  yang dapat positif atau negatif, maka persamaan karakteristik (3-17) akan mungkin

mempunyai harga riil positif. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa gerak kopling inersia bisa tidak stabil apabila harga  $a_0$  negatif. Harga koefisien  $a_0$  akan mendekati nol dan kemudian menjadi negatif jika rasio inersia  $F$  mendekati  $-1$  dan  $G$  mendekati  $+1$ . Hal ini berarti bahwa inersia roll  $I_x$  berharga sangat kecil dibandingkan dengan  $I_y$  dan  $I_z$  serta harga  $I_y \cong I_z$ . Bentuk ini sesuai dengan konfigurasi pesawat udara berbadan ramping (*slender body*) seperti jenis *fighter* atau roket. Karena pesawat udara supersonik rata-rata mempunyai bentuk badan ramping, maka jenis pesawat seperti ini sensitif terhadap manuver *roll* dan gerak kopling inersia dapat mengarah ke tidak stabil.

Pada paragraf 4 berikut akan diberikan contoh analisis kestabilan kopling inersia dengan metode *root locus* dengan memplot akar-akar karakteristik yang terdapat dalam persamaan (3-16),

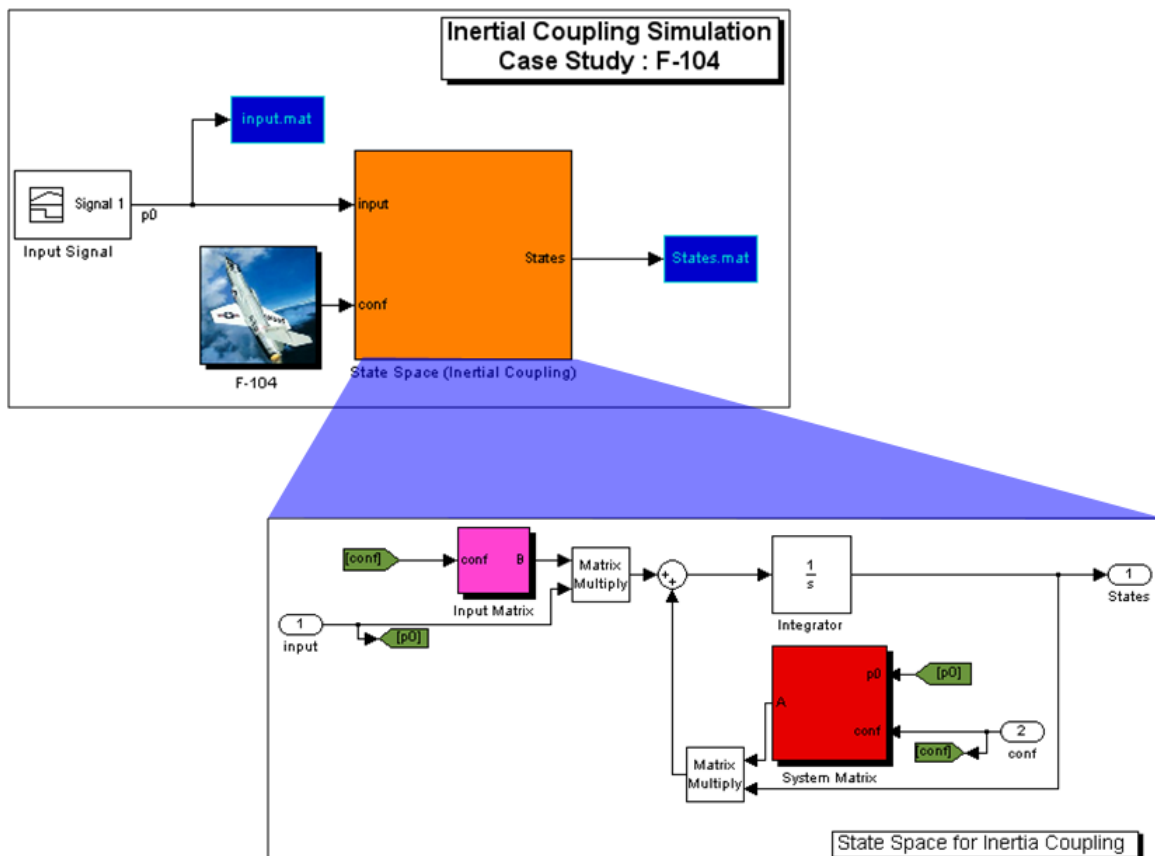
dengan memvariasikan harga *steady roll*  $p_0$ , pada pesawat fighter F-104

#### 4. SIMULASI GERAK DAN ANALISIS KESTABILAN KOPLING INERSIA

##### 4.1 Pemodelan Persamaan Gerak pada Simulink

Pemodelan persamaan gerak kopling inersia dilakukan dengan cara mengubah persamaan gerak kopling inersia yang diperoleh dari paragraf 3 ke dalam bentuk blok simulasi perangkat lunak Simulink/Matlab. Simulink adalah suatu bagian dari perangkat lunak Matlab yang digunakan untuk mensimulasikan persamaan matematika [Math Works Inc., 1999].

Persamaan gerak kopling inersia yang akan dimodelkan adalah persamaan (3-16). Persamaan gerak kopling inersia dalam bentuk persamaan diferensial di atas dimodelkan dalam blok persamaan gerak pada Simulink seperti tersajikan pada Gambar 4-1.



Gambar 4-1: Blok persamaan gerak kopling inersia pada Simulink

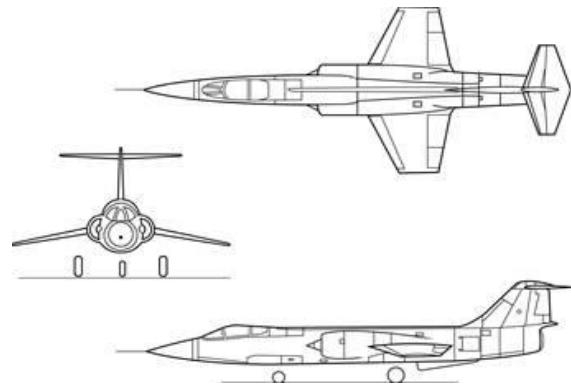


Pemodelan persamaan gerak kopling inersia di atas terdiri dari blok-blok sebagai berikut, lihat juga [Samputra, H., 2008]:

- a. Blok *input* signal berupa kecepatan sudut *roll* awal ( $p_0$ ). Blok ini mewakili input berupa input *step* yang besarnya dapat diatur. Dimensi yang digunakan pada blok *input* ini adalah radian.
- b. Blok parameter-parameter konfigurasi pesawat uji (Blok F-104). Blok konfigurasi ini berisi semua parameter yang mewakili pesawat udara F-104. Parameter-parameter tersebut dapat dilihat pada Tabel 4-1.
- c. Blok persamaan *state space* untuk sistem kopling inersia (*inset*). Blok *state-space* mewakili dinamika gerak pesawat udara F-104 yang direpresentasikan dalam persamaan linear. Persamaan ini mewakili dinamika gerak F-104 untuk satu kondisi terbang tertentu.
- d. Blok perekam data *input* dan *output* simulasi (*input.mat* dan *States.mat*). Blok ini digunakan untuk merekam semua data-data yang dihasilkan melalui simulasi di atas. Data-data yang direkam ini disimpan dalam file dengan ekstensi \*.mat. Data ini kemudian dapat di plot dalam representasi grafik dua dimensi.

#### 4.2 Simulasi Numerik

Pesawat udara F-104 mempunyai respon gerak kopling inersia yang tidak stabil [Blakelock, J.H., 1965]. Hal tersebut diketahui setelah dilakukan analisis kopling inersia terhadap pesawat udara tersebut. Simulasi kopling inersia untuk pesawat udara F-104 dilakukan untuk konfigurasi dan kondisi terbang yang mempunyai data sebagai berikut [Cook, V., Michael, 2007; <http://www.af.mil/shared/media/ggallery/hires/afg-041110-023.jpg>, 2011; Teper, G.L, 1969]:



Gambar 4-2: Gambar tiga pandangan pesawat tempur F-104

Tabel 4-1: DATA GEOMETRI, MASA, INERSIA, AERODINAMIKA DAN KONDISI TERBANG F-104

Data Geometri	
Luas sayap ( $S$ )	: 18,2 m <sup>2</sup>
Span sayap ( $b$ )	: 6,67 m
mac ( $c$ )	: 2,92 m
Data massa dan Inersia	
Massa ( $m$ )	: 7393 kg
$I_x$	: 4974 kg m <sup>2</sup>
$I_y$	: 79993 kg m <sup>2</sup>
$I_z$	: 81256 kg m <sup>2</sup>
Data kondisi terbang	
Kecepatan ( $V$ )	: 1032kts
Tinggi terbang ( $h$ )	: 55000 ft
Kerapatan udara ( $\rho$ )	: 0,148 kg/m <sup>3</sup>
Tekanan dinamik ( $q$ )	: 20877 kg /ms <sup>2</sup>
Data aerodinamika	
$C_{m_\alpha} = -1,308$	[rad <sup>-1</sup> ]
$C_{m_q} = -4,83$	[rad <sup>-1</sup> ]
$C_{n_\beta} = 0,242$	[rad <sup>-1</sup> ]
$C_{n_r} = -0,649$	[rad <sup>-1</sup> ]
$C_{n_p} = -0,093$	[rad <sup>-1</sup> ]

Dengan menggunakan data seperti diberikan pada Tabel 4-1, pesawat udara F-104 disimulasikan untuk mendapatkan respons gerak pesawat terhadap input berupa kecepatan sudut *roll* yang besar serta melihat karakteristik kestabilan kopling inersia pesawat udara ini. Simulasi dilakukan dengan skenario simulasi seperti diberikan pada Tabel 4-2 berikut:

Tabel 4-2: SKENARIO SIMULASI KOPLING INERSIA PESAWAT UDARA F-104

Simulasi	Input
#1	Roll rate berupa fungsi step sebesar 2,5 rad/sec
#2	Roll rate berupa fungsi step sebesar 3 rad/sec
#3	Roll rate berupa fungsi step sebesar 4,5 rad/sec

Hasil simulasi skenario #1, #2 dan #3 ditampilkan pada Gambar 4-3, 4-4 dan 4-5.

**(a) Hasil simulasi #1: input roll rate berupa step sebesar 2,5 rad/sec**

Terlihat bahwa *output* simulasi #1 konvergen menuju nilai *steady state*, jadi dapat disimpulkan bahwa pesawat udara F-104 stabil untuk konfigurasi terbang simulasi #1 ini. Dapat juga dilihat bahwa untuk kondisi kopling inersia yang stabil, *overshot* sudut  $\alpha$  cukup kecil, yaitu sekitar 0,1 deg. Hal tersebut terjadi karena *input roll rate* merupakan *state* dalam modus lateral direksional sedangkan *output  $\alpha$*  merupakan *state* dalam modus longitudinal. (Gambar 4-3).

**(b) Hasil simulasi #2: input roll rate berupa step sebesar 3 rad/sec**

Pada simulasi #2, dimana input yang diberikan adalah *roll rate* berbentuk *step* dengan harga sebesar 3 rad/sec, *output* yang dihasilkan divergen. Dari *output* simulasi dilihat bahwa harga  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $q$ , dan  $r$ , membesar dan tidak kembali ke harga *steady* tertentu. Berdasarkan hal tersebut dapat disimpulkan untuk roll rate 3 rad/sec, pesawat udara F-104 tidak stabil pada saat terjadi gerak kopling inersia. Ketidakstabilan ini akan dijelaskan pada bagian akhir paragraf dengan cara memplotkan akar karakteristik persamaan gerak kopling inersia untuk pesawat udara F-104 ini (Gambar 4-4).

**(c) Hasil simulasi #3: input rollrate berupa step sebesar 4,5 rad/sec**

Dengan harga *input* yang makin besar pada simulasi #3, terlihat bahwa *outputnya* konvergen menuju suatu keadaan *steady* tertentu. Berdasarkan hal tersebut dapat disimpulkan bahwa pesawat udara F-104 stabil untuk input *roll rate* berupa *step* sebesar 4,5 rad/sec. Dari simulasi #1, simulasi #2, simulasi #3 dapat disimpulkan bahwa pesawat udara F-104 tidak stabil secara kopling inersia untuk suatu rentang input *roll rate* diantara 2,5 rad/sec dan 4,5 rad/sec. Harga pasti dari rentang tersebut dapat diketahui dengan analisis *root locus* pada persamaan kopling inersia pesawat udara F-104. (Gambar 4-5).

**4.3 Analisis Kestabilan**

Jika harga parameter-parameter dalam Tabel 4-1 dimasukkan ke dalam persamaan (3-16) didapatkan:

$$\begin{aligned}
 a_3 &= 0,4953 \\
 a_2 &= 25,73 + 1,8804 p_0^2 \\
 a_1 &= 5,0843 + 0,4953 p_0^2 \\
 a_0 &= 136,89 - 23,8965 p_0^2 + 0,8804 p_0^4
 \end{aligned}$$

Kemudian koefisien-koefisien  $a_3, a_2, a_1$  dan  $a_0$  disubstitusikan ke dalam persamaan (3-17) sehingga didapat persamaan karakteristik kopling inersia pesawat udara F-104 sebagai berikut:

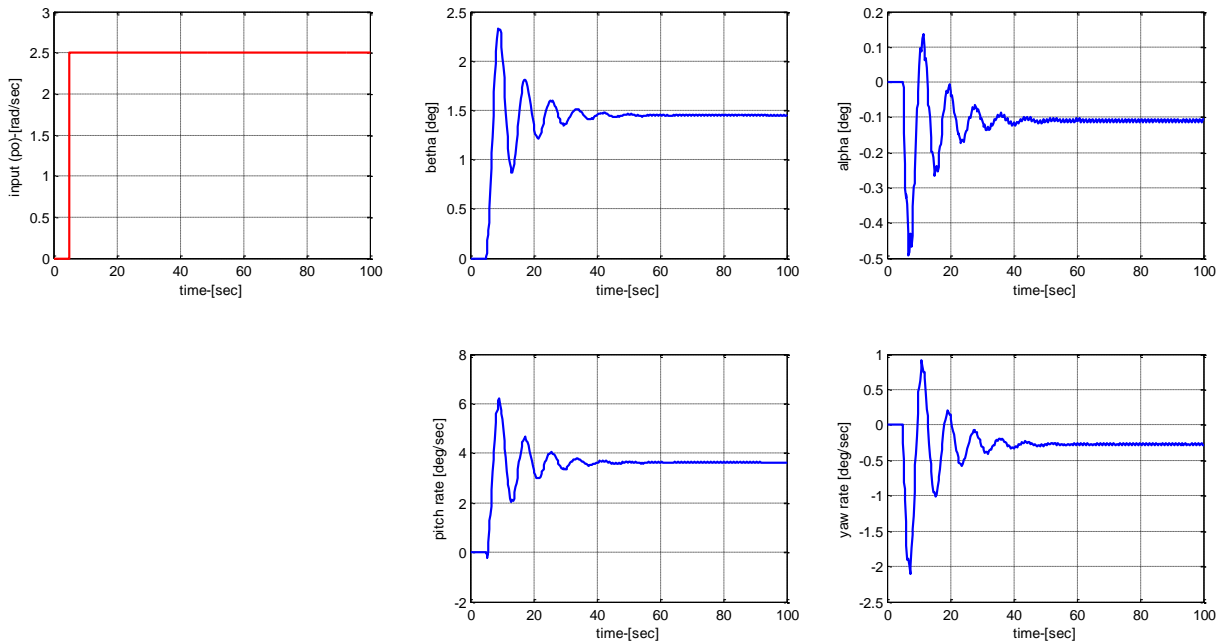
$$\begin{aligned}
 s^4 + 0,4953s^3 + (25,73 + 1,8804 p_0^2)s^2 \dots \\
 + (5,0843 + 0,4953 p_0^2)s + \dots \\
 (136,89 - 23,8965 p_0^2 + 0,8804 p_0^4) = 0
 \end{aligned}$$

Dengan memvariasikan harga  $p_0$  didapatkan kedudukan akar-akar karakteristik persamaan di atas dalam bidang real-imaginer seperti pada Gambar 4-6.

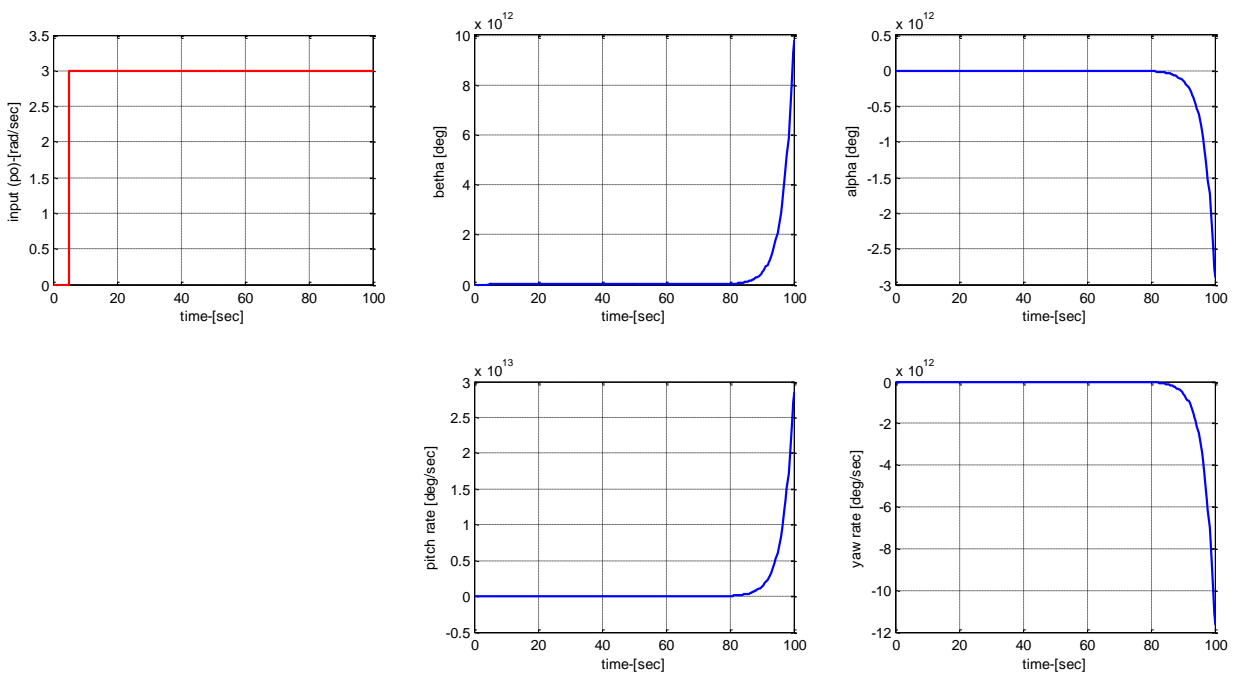
Dari hasil simulasi yang dilakukan sebelumnya diketahui bahwa pesawat udara F-104 tidak stabil secara

kopling inersia pada rentang *input roll rate* diantara 2 rad/sec dan 4,5 rad/sec. Harga rentang tersebut dapat diketahui pada analisis *root locus* ini, yaitu antara 2,87 rad/sec sampai dengan 4,35 rad/sec.

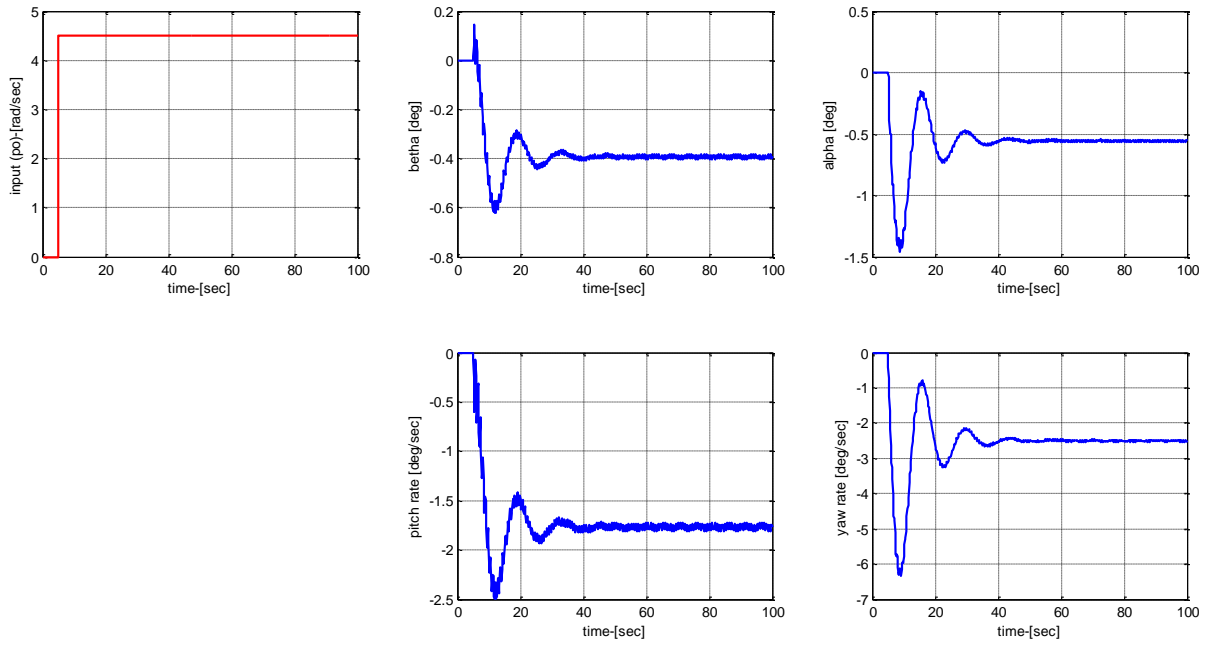
Hal tersebut diketahui dengan melihat rentang dimana akar karakteristik persamaan kopling inersia pesawat udara F-104 bergerak ke sebelah kanan sumbu imajiner.



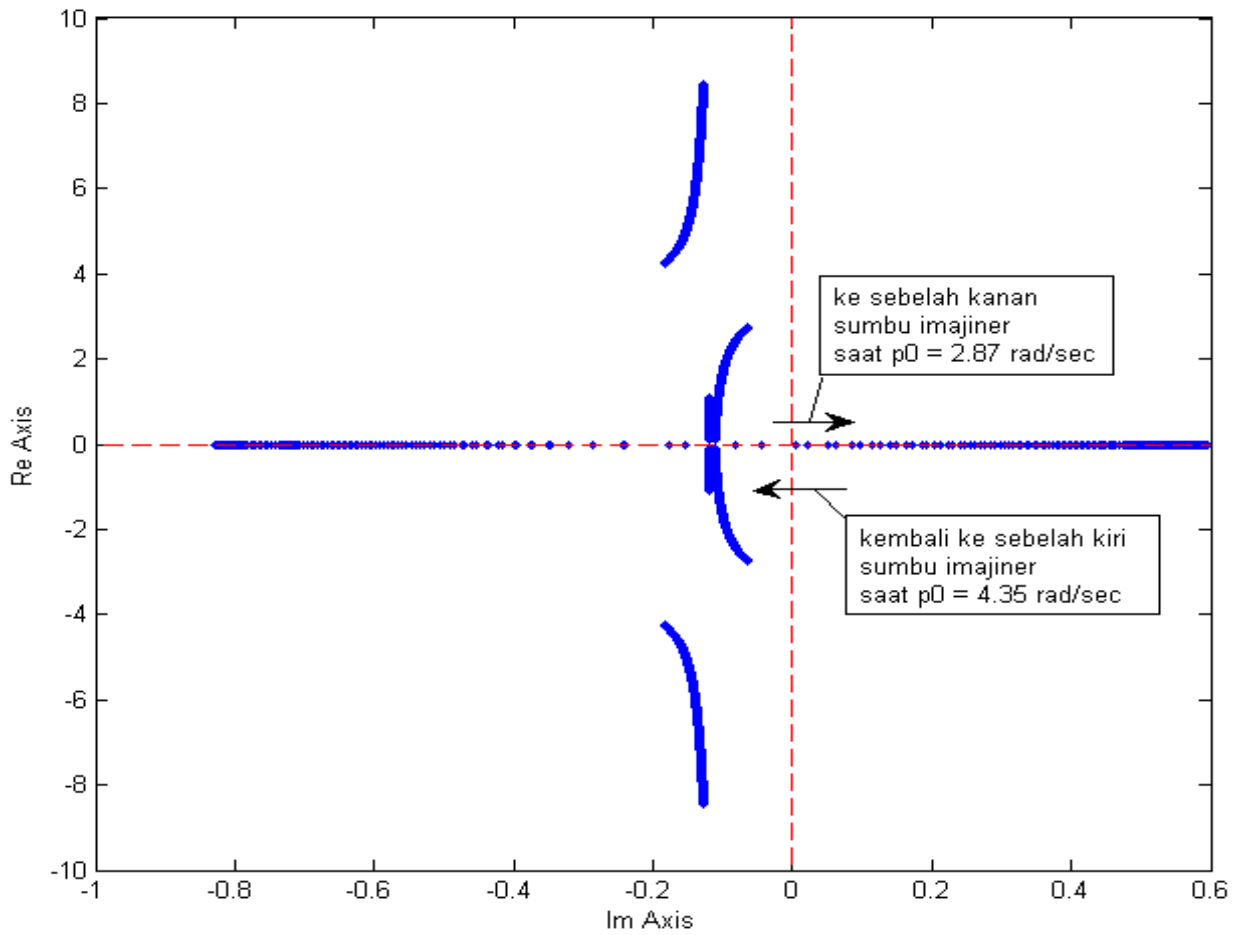
Gambar 4-3: Simulasi skenario #1, input roll berupa step, 2,5 rad/sec



Gambar 4-4: Simulasi skenario #2, input roll berupa step, 3 rad/sec



Gambar 4-5: Simulasi skenario #3, *input roll* berupa step, 4,5 rad/sec



Gambar 4-6: *Root locus* persamaan karakteristik kopling inersia pesawat udara F-104

## 5 KESIMPULAN

Pada makalah ini telah dibahas penurunan persamaan gerak kopling inersia suatu wahana dirgantara, simulasi gerak dan analisis kestabilan gerak kopling inersia wahana tersebut. Contoh simulasi gerak dan analisis kestabilan untuk pesawat udara jenis *fighter* F-104 juga telah diberikan. Dari hasil simulasi dan analisis kestabilan gerak kopling inersia dari jenis F-104 terlihat bahwa pesawat udara tersebut dapat menjadi tidak stabil saat gerak *roll* pada harga kecepatan sudut *roll* tertentu.

Metodologi yang dikembangkan pada makalah ini dapat diaplikasikan untuk simulasi gerak dan analisis kestabilan wahana dirgantara yang lain seperti roket yang terbang dengan kecepatan tinggi dan mempunyai bentuk badan ramping.

Untuk penelitian selanjutnya, dapat dilakukan perluasan terhadap model aerodinamika yang terdapat pada persamaan (3-12) dengan menambahkan faktor kendali seperti *aileron*, *elevator* dan *rudder* sehingga input simulasi bukan kecepatan sudut *roll*, namun kombinasi antara gerak bidang kendali *aileron*, *elevator* dan *rudder*.

## DAFTAR RUJUKAN

- Blakelock, J.H., 1965. *Automatic Control of Aircraft and Missiles*. John Wiley & Sons Inc., New York.
- Cook, V., Michael, 2007. *Flight Dynamics Principles*, Elsevier, Great Britain.
- Etkin, B., 1972. *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley & Sons Inc., New York.

<http://www.af.mil/shared/media/ggallery/hires/afg-041110-023.jpg> diakses tanggal 8 Januari 2011.

- Math Works Inc., 1999. *Simulink®*, *Dynamic System Simulation for Matlab*, Prentice Hall Inc., New Jersey.
- Muhammad, H. dan Y.I. Jenie, 2010. *Diktat Kuliah AE3231 Dinamika Terbang*, Fakultas Teknik Mesin dan Dirgantara, Institut Teknologi Bandung, Bandung.
- Muhammad, H., 2010. *Diktat Kuliah AE4032 Dinamika Terbang Lanjut*, Fakultas Teknik Mesin dan Dirgantara, Institut Teknologi Bandung, Bandung.
- Mulder, J.A., 2000. *Flight Dynamics*, Lecture Notes, Delft University of Technology, The Netherlands.
- Roskam, J., 1979. *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls Part I and II*, Roskam Aviation and Engineering Corp., Ottawa - Kansas.
- Samputra, H., 2008. *Analisis Kestabilan Kopling Inersia Wahana Terbang WiSE NA 4*, Tugas Sarjana, Program Studi Aeronotika dan Astronotika, Fakultas Teknik Mesin dan Dirgantara, Institut Teknologi Bandung, Bandung.
- Teper, G.L, 1969. *Aircraft Stability and Control Data*. System Technology, Inc., STI Technical Report 176-1. NASA Contractor Report, National Aeronautics and Space Administration, Washington D.C. 20546.