KONTROL KESTABILAN GERAK LONGITUDINAL ROKET BALISTIK

Oleh :

Momon Sadiyatmo *)
Adi Sadewo **)

Intisari

Tulisan ini menyajikan analisis dan simulasi sistem kontrol gerak longitudinal roket dengan trayektori balistik. Teori kontrol optimal dengan meminimumkan indeks kinerja berdasarkan teori linier quadratic regulator diterapkan disini. Kondisi kestabilan roket tanpa dan dengan adanya kontrol optimal dibahas dalam makalah ini.

1. PENDAHULUAN

Teori kontrol optimal pada dasarnya adelah suatu kontrol yang mempunyai pendekatan solusi berdasarkan minimisasi dari suatu indek performasi (indek kinerja). Indek performasi disini mempunyai fungsi dengan variabel beberapa macam dan pada umumnya mempunyai lebih dari satu variabel. Adapun parameter yang sering digunakan pada indek performasi adalah parameter energi dan waktu, karena parameter inilah yang merupakan kendala pada suatu plant. Salah satu indek kinerja yang cukup populer dan banyak digunakan adalah fungsi kuadrat untuk sistem linier invarian (*Linear Quadratic Regulator /LQR*).

Pada kasus ini akan ditinjau tentang dinamika roket balistik, sedangkan permasalahan yang akan dibahas adalah kestabilan gerak longitudinal dari roket balistik. Pendekatan yang digunakan adalah regulator optimal, yaitu permasalahan kontrol optimum regulator (LQR). Untuk mempermudah permasalahan, dalam hal ini akan digunakan asumsi-asumsi atau pendekatan dari persamaan dinamika roket, sehingga fungsi transfer sistem dapat disimulasikan.

2. REGULATOR OPTIMAL

Regulator merupakan salah satu sistem kontroler yang bersifat mempertahankan harga output pada suatu kondisi yang diinginkan. Untuk mendapatkan respon output dari sistem kontrol yang diinginkan ada beberapa strategi yang dapat dilakukan, misalnya strategi optimal waktu, strategi optimal energi. Pemakaian strategi optimal waktu akan memberikan respon output secepat mungkin menuju harga set point, tanpa memperhitungkan seberapa besar energi yang diperlukan. Sedangkan jika menggunakan optimal energi sistem akan menuju harga set point dengan energi sehemat mungkin tanpa memikirkan berapa waktu yang diperlukan. Sebuah regulator yang menerapkan kedua strategi tersebut dinamakan regulator optimal. Dengan demikian regulator optimal adalah regulator yang dirancang berdasarkan kriteria optimal, dalam arti respon sistem kontrol secepat mungkin tetapi energi yang diperlukan seminimum mungkin.

Perancangan regulator optimal didasarkan pada suatu fungsi harga, dan fungsi harga yang dipilih adalah fungsi harga kuadrat, sehingga regulator yang dihasilkan disebut regulator linier kuadrat (LQR). Fungsi harga kuadrat merupakan fungsi kuadrat dari variabel sistem dan variabel kontrol. Pada regulator optimal, variabel kontrol didapatkan dari feedback sistem. Dengan demikian permasalahan yang timbul adalah menentukan harga penguatan sedemikian hingga fungsi harga menjadi minimum.

Bentuk umum LQR adalah sebagai berikut :

$$J(t_0) = \frac{1}{2} X(t)^T (t) S(t) X(t) + \frac{1}{2} \int_{t_0} (X(t)^T Q(t) X(t) + u(t)^T R(t) u(t)) dt \tag{2-1}$$

dengan

X	: parameter state dari plant
S(t),Q(t),R(t)	: parameter pembobot
S(t) dan Q(t)	: matrik simetri, positif dan semidefinit
R(t)	: positif definit

*) Staf Peneliti Bidang Teknologi Muatan Dirgantara
**) Senior Engineer, LAPAN

$J(t_o)$: harga indek kinerja

Untuk sistem invarian waktu seperti berikut dibawah ini :

$$\dot{X} = A X + B u \qquad (2\text{-}2)$$
$$Y = C X$$

dan jika sistem terkontrol dan variabel X dapat diukur (observable) maka ada hukum kontrol optimal yaitu

$$u = -K X \qquad (2\text{-}3)$$

dan

$$K = R^{-1} B^T S \qquad (2\text{-}4)$$

S adalah solusi persamaan Ricatti dari

$$-\dot{S} = SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + C^T Q \qquad (2\text{-}5)$$

3. PERANCANGAN REGULATOR OPTIMAL UNTUK ROKET BALISTIK

Pada pembahasan ini akan ditinjau sebuah roket balistik yang sedang terbang. Arah gerak roket longitudinal (diasumsikan) dikendalikan oleh arah semburan dari motor roket (propelan) melalui nosel yang dapat digerakkan. Sudut pergeseran dari nozel merupakan input dari sistem kontrol yang juga untuk menjaga kestabialn roket.

Untuk menurunkan fungsi transfer dari roket balistik diperlukan analisis persamaan gerak atau dinamika roket. hal ini diperlukan referensi sistem sumbu roket untuk memudahkannya. Misal diasumsikan jika sumbu X dari roket adalah sepanjang arah longitudinal dari roket, maka sistem sumbu bodi menjadi sistem sumbu kestabilan dan selanjutnya dinamakan kestabilan longitudinal (lihat gambar). Dengan menempatkan sumbu Z pada bidang trayektori, maka semua gerak pitch bersumbu pada sumbu Y. Dengan demikian analisis aerodinamika roket dapat didekati dengan aerodinamika pesawat terbang.

Untuk analisis aerodinamika soket seperti padsa gamabar diasumsikan bahwa :

- Sumbu X dan Z pada satu bidang trayektori (simetri satu bidang),dan pusat sumbu berimpit dengan titik berat roket.
- Massa roket konstan.
- Roket mempunyai bodi rigid (padat).
- Gangguan dari equilibrium kecil.
- Sistem diterministik.

Selanjutnya persamaan dinamika roket dianalogikan dengan persamaan dinamika pesawat terbang. Hasil pendekatan penurunan persamaan dinamika roket dengan fungsi Laplace diberikan sebagai berikut :

$$\left[\frac{mU}{Sq} - c_{z\alpha}\right]\alpha(s) + \left[-\frac{mU}{Sq}s - c_W(\sin\Theta)\right]\theta(s) = c_{zs}\delta \qquad (3\text{-}1)$$

$$\left[-\frac{d}{2U}c_{m\dot{\alpha}} - c_{m\alpha}\right]\alpha(s) + \left[\frac{I_y}{Sqd}s^2 - \frac{d}{2U}c_{mq}s\right]\theta(s) = c_{ms}\delta \qquad (3\text{-}2)$$

Untuk ilustrasi studi kasus ini diberikan data tentang keadaan roket satu perioda terbang (dimana besarnya parameter masih dianggap konstan) yaitu :
Roket terbang setelah 75 detik dari peluncuran, ketinggian yang dicapai 36.000 ft dan mempunyai kecepatan 1.285 ft/sc2 sedangkan massanya 445 slug,

kemudian tetapan-tetapan lain adalah sebagai berikut :

$$\frac{mU}{Sq} = 88.5\,\text{sec}$$

$$\frac{mg}{Sq} = -Cw = 2.22$$

$$I_y = 1150000\,slugft^2\ dan\ \frac{I_y}{Sqd} = 4.75\,\text{sec}^2$$

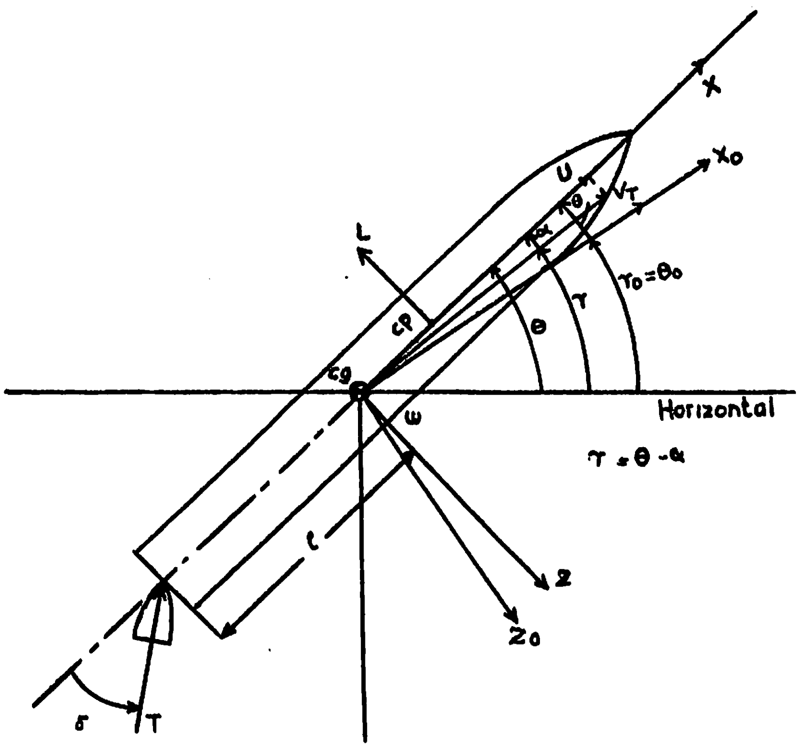
Dengan mensubtitusi konstanta-konstanta kedalam persamaan dinamika didapatkan fungsi transfer sistem roket balistik. Adapun fungsi transfer tersebut adalah :

$$\frac{\theta(s)}{\delta(s)} = \frac{-7.21(s+0.0526)}{(s+1.6)(s-1.48)(s-0.023)} \qquad (3\text{-}3)$$

selanjutnya dilakukan pole dan zeo canceling yaitu zero cancelation di - 0.0526 dan pole concelation di 0.023, sehingga fungsi transfer roket menjadi :

$$H(s) \approx \frac{-7.21}{(s+1.6)(s-1.48)} \qquad (3\text{-}4)$$

Ternyata sistem tidak stabil pada pole di 1.48, untuk ini diperluakn sistem pengontrol agar sistem menjadi stabil. Pendekatan sistem pengontrol dilakukan dengan sistem kontrol optimal dengan indek kinerja l gr.



Gambar 3-1. ROKET DAN SISTEM KOORDINAT

Keterangan :

Cg = titik pusat gravitasi / berat dari roket
Cp = titik pusat aerodinamik roket
X = sumbu X berimpit dengan sumbu roket
Xo = arah roket pada saat to (keluar dari peluncur)
U = kecepatan roket
α = sudut serang
d = diamter roket
l = panjang titik pusat roket dengan motor roket
δ = sudut defleksi motor roket
Θo = sudut elevasi awal
θ = selisih sudut elevasi roket terhadao sudut awal
T = gaya dorong yang dihasilkan motor roket.

Dalam merealisasikan kontroler optimal fungsi transfer roket pada dasarnya adalah mencari gain feedback dari variabel keadaan. Mengingat bahwa kontroler yang akan direalisasikan secara optimal, maka penyelesaian persamaan Ricatti merupakan keharusan. Langkah-langkah untuk merealisasikan kontroler optimal tersebut adalah sebagai berikut :

A) Konversi fungsi transfer ke persamaan state space

Fungsi transfer dikonversikan ke persamaan keadaan dalam bentuk standar (diterministik) yaitu :

$$\dot{X} = AX + Bu \tag{3-5}$$

$$Y = CX \tag{3-6}$$

$$u = -KX \tag{3-7}$$

$$K = R^{-1}B^{T}S \tag{3-8}$$

S adalah solusi dari persamaan Ricatti
Persamaan (3-5) menjadi

$$\dot{X} = (A - b(R^{-1}B^{T}S)X$$

$$\dot{X} = AA.X \tag{3-9}$$

Persamaan (3-9) adalah sistem closed loop. Selanjutnya akan dicari matrik AA.

Bentuk konversi dari fungsi transfer (3-4) roket yang sudah disederhanakan mempunyai harga matrik A, B, C, D sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} -0.12 & 2.368 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2.58 \end{bmatrix}$$

B) Mencari solusi persamaan Ricatti

Untuk menyelesaikan persamaan Ricatti seperti (2-5) dapat dilakukan dengan penyelesaian secara analitik, dengan bantuan sistem Lagrange-hamiltonian yaitu :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} \tag{3-10}$$

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^{T} \\ -Q & -A^{T} \end{bmatrix} \tag{3-11}$$

nilai eigen dari H dapat ditulis :

$$D = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \tag{3-12}$$

dan selanjutnya untuk mendapatkan eigen vektor, yang ditulis

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \tag{3-13}$$

dari nilai W yang didapat, selanjutnya digunakan untuk menentukan harga $S(\infty) = W_{21}W_{11}^{-1}$

$S(\infty)$ adalah penyelesaian persamaan ricatti untuk waktu $t \to \infty$, dan ini digunakan untuk menentukan harga K untuk masalah regulator yaitu $K(\infty) = R^{-1}B^{T}S(\infty)$

Penyelesaian untuk roket balistik ini adalah sebagai berikut :

$$H = \begin{bmatrix} -0.12 & 2.368 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0.12 & -1 \\ 0 & -1 & -2.368 & 0 \end{bmatrix}$$

$$eig = \begin{bmatrix} -2.0404 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2598 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0404 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.2598 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0697 & -0.3446 \\ -0.3282 & 0.3172 \\ 0.5089 & 0.2957 \\ 0.4298 & 0.8076 \end{bmatrix}$$

Dari hasil tersebut kemudian untuk menentukan harga K, dengan memberi bobot matrik Q = eye (2) dan R = 1, maka K dapat ditentukan , dan hasilnya

$$K = [3.10802 \quad 4.9385]$$

Akhirnya nilai K digunakan untuk menentukan sistem close loop, dan matrik A yang baru, yaitu *AA* dan didapatkan sebagai :

$$AA = \begin{bmatrix} 3.1802 & -2.5705 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasil simulasi respon step dan impulse dapat dilihat pada **Lampiran A-F.**

Dari hasil respon step dan impulse sistem kestabilan roket balistik pada gerak longitudinal ditunjukan bahwa sebelum diberi kontroler sistem roket tidak. Namun setelah diberi kontroler, yaitu diregulator optimal menunjukkan adanya kestabilan roket. Adapun respon yang ditunjukkan dalam simulasi (Lampiran A-F) adalah optimal menurut hubungan regulator optimal dalam kondisi tunak.

4. KESIMPULAN

Dari simulasi melalui respon step dan impulse dari sistem open loop dan close loop, dapat disimpulkan bahwa regulator optimal untuk gerak longitudinal roket Balistik memberikan respon untuk fungsi step mendekati orde satu dengan tetapan waktu T ≈ 2 detik.

5. DAFTAR PUSTAKA

1. John H. Blakelock, *Automatic Control of Aircraft and Missile,* John Willey & Sons, Inc, New York , 1965.
2. Frank L. Lewis, *Optimal Control,* John Willey & Sons, New York, 1986.
3. Kosmayanto Kadiman, *Sistem Kontrol Berba-sis Komputer,* Laboratoria Instrumentasi dan Kontrol Jurusan Teknik Fisika, ITB, 1991.

LAMPIRAN A

PROGRAM SIMULASI RESPON FUNGSI STEP DAN IMPULSE UNTUK SISTEM OPEN LOOP

```
% Simulasi fungsi step dan impulse roket balistik
% lup terbuka (tanpa pengontrol)

% Fungsi alih
%            -7.21
% H(s) = -----------------
%        s^2 + 0.12 s - 2.368

num = [-7.21];
den = [1 0.12 -2.368];
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den);
t = 0:0.01:10;
[y,x,t] = step(num,den,t);
plot(t,y);
title('Respon Fungsi Step Tanpa Pengontrol');
xlabel('Waktu (sec)');
ylabel('Output');
grid;
pause;
meta plot_1;
clg;
[yy,x,t] = impulse(num,den,t);
plot(t,yy);
title('Respon fungsi Impulse Tanpa Pengontrol');
xlabel('Waktu (sec)');
ylabel('Output');
grid;
meta plot_2;
```

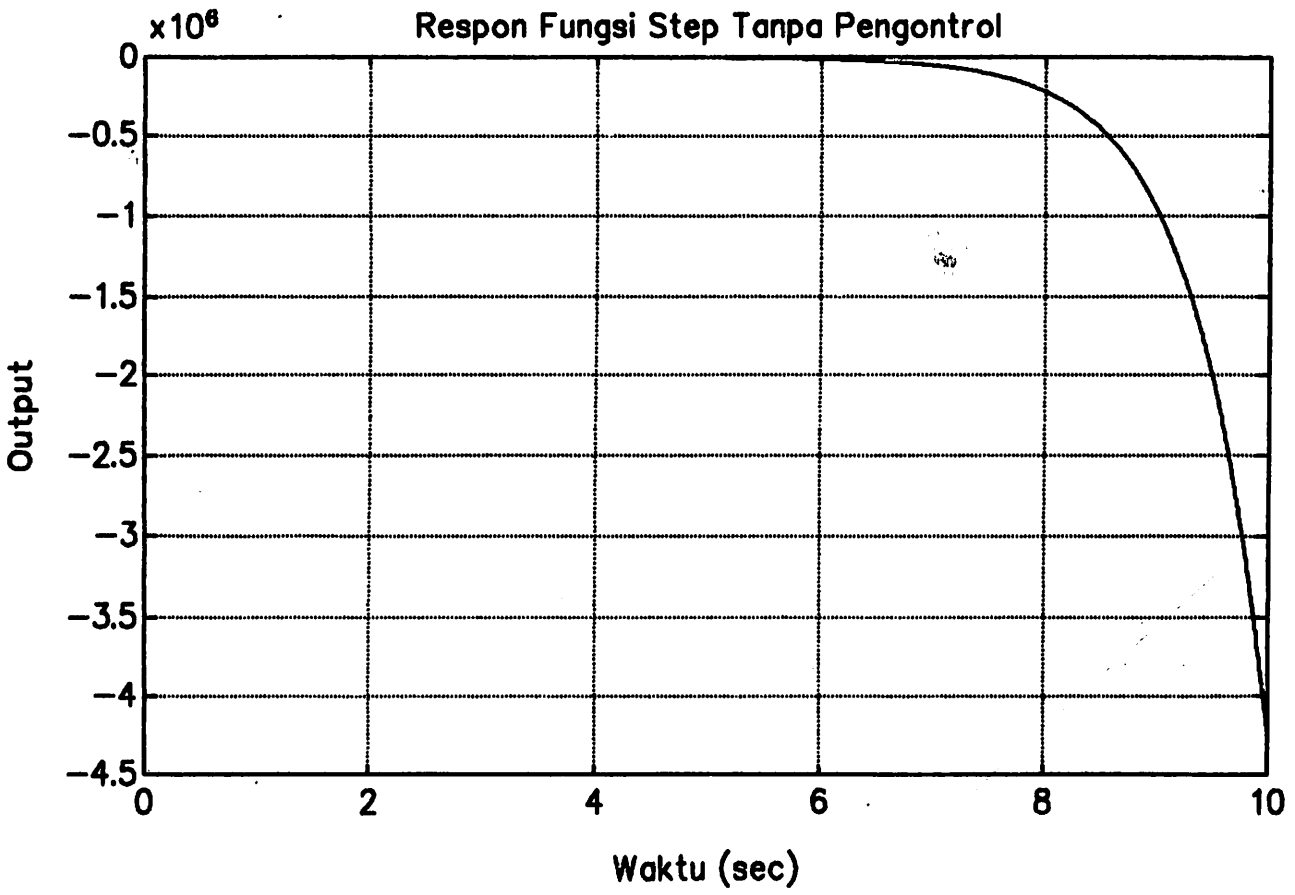
LAMPIRAN B

PROGRAM SIMULASI RESPON FUNGSI STEP DAN IMPULSE UNTUK SISTEM CLOSED LOOP

```
% Simulasi fungsi step dan impulse roket balistik
% lup tertutup (dengan pengontrol)
% feedback kontrol optimal (K)
% dengan pengontrol u = - KX

% Fungsi alih
%           -7.21
% H(s) = -------------------
%       s^2 + 0.12 s - 2.368

num = [-7.21];
den = [1 0.12 -2.368];

% Fungsi alih akan diubah kebentuk state space

[A,B,C,D] = tf2ss(num,den);
C = [0 1];

% Akan dicari K (penguatan kontrol optimal) dengan pendekatan
% Linear quadratic regulator (lqr)
% [K,S,E] = LQR ( A,B,Q,R ), Q dan R sebagai matrik pembobot yang ditentukan
% terlebih dahulu, dan biasanya diambil Q = Identitas, R = 1

Q = eye(2) ; % identitas 2 X 2
R = 1 ;
[K,S,E] = lqr (A,B,Q,R);

% Akan dicari sistem closed loop

AA = A - B*K; % AA adalah matrik state closed loop
         % dengan gain feedback K

% Selanjutnya akan ditinjau respon step dan impulse
% sistem closed loop

t = 0:0.01:10;
[y,x,t] = step(AA,B,C,D,1,t);
plot(t,y);
title('Respon Fungsi Step dengan Pengontrol');
xlabel('Waktu (sec)');ylabel('Output');grid;
pause;
meta plot_11;
clg;
[yy,x,t] = impulse(AA,B,C,D,1,t);
plot(t,yy);
title('Respon fungsi Impulse dengan Pengontrol');
xlabel('Waktu (sec)');ylabel('Output');
grid;
meta plot_22;
```

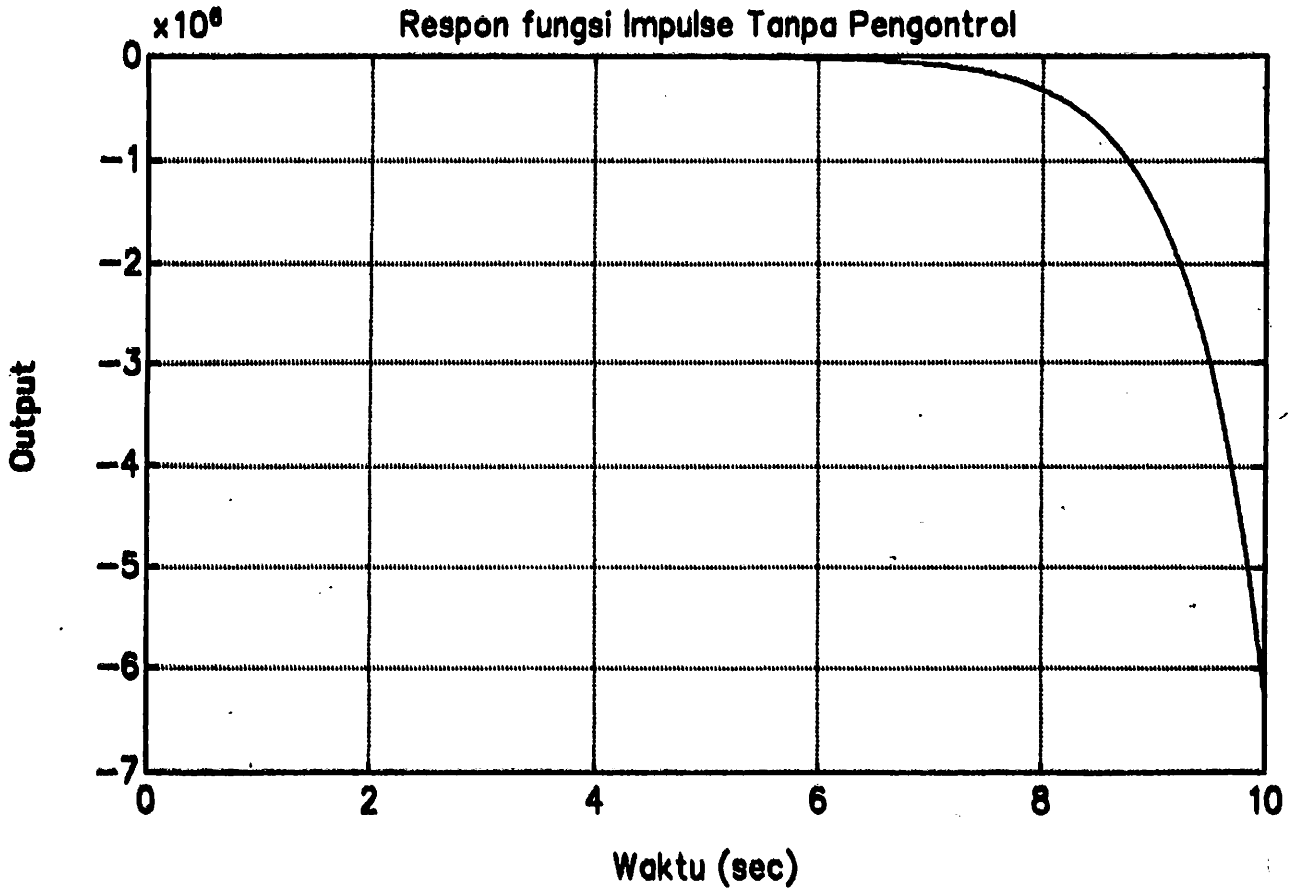
LAMPIRAN C

GAMBAR RESPON FUNGSI STEP DARI PROGRAM SIMULASI PADA LAMPIRAN A



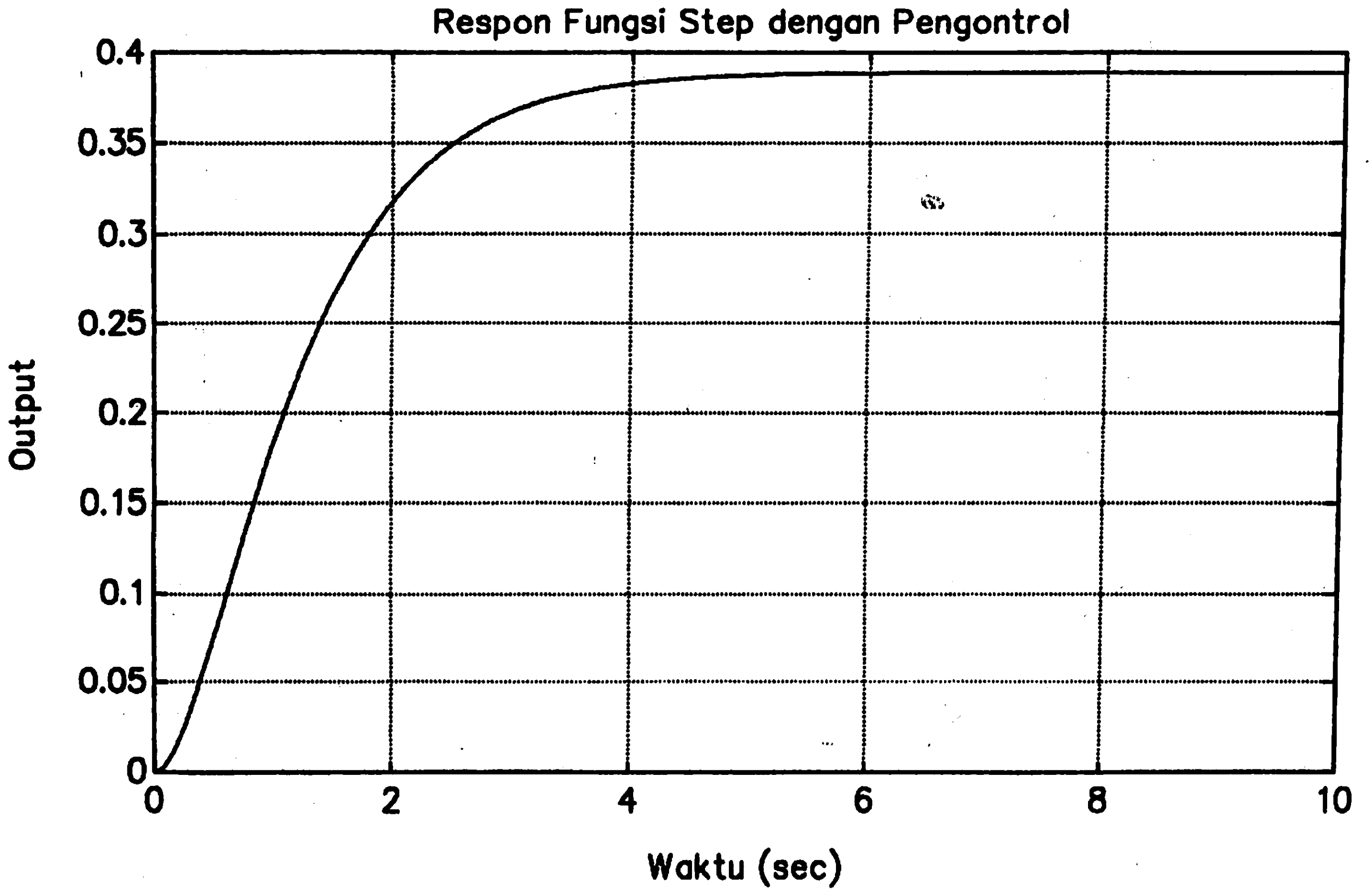
LAMPIRAN D

GAMBAR RESPON FUNSI IMPULSE DARI PROGRAM SIMULASI PADA LAMPIRAN A



LAMPIRAN E

GAMBAR RESPON FUNGSI STEP DARI PROGRAM SIMULASI PADA LAMPIRAN B



LAMPIRAN F

GAMBAR RESPON FUNGSI IMPULSE DARI PROGRAM SIMULASI PADA LAMPIRAN B